目　录

第一章　数学预备知识

在这一章中，我们将复习一下作为讨论以后各章几何发展基础的一些数学概念，其中大部分是大多数读者所熟悉的．但是，我们将从许多读者不太熟悉的拓扑和映射这两个题目开始．这样做的主要目的是为了能精确地给出流形的定义，这在第二章一开始就要进行论述．不熟悉拓扑的读者可以先跳过本章的最初两节，等读了第二章对为什么要引入拓扑有了足够的认识后再回过来补读它们．

1.1　R^n 空间及其拓扑

R^n 空间是通常的 n 维向量代数空间：R^n 中的点是 n 个实数的一个序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，也称为一个 n 重实数．从直观上我们知道这是一个连续空间，即在 R^n 中存在着与任何给定点能任意接近的一些点，而连接任何两点的一根线可以被细分为任意多段，它们也连接着 R^n 的点．这些概念与诸如格点（所有 n 重整数 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 组成的集合）所具有的性质形成对照．R^n 中的连续概念通过对它的拓扑的研究而精确化．名词"拓扑"在数学中有两种不同的含义．我们现在要讨论的这一种可以称为局部拓扑．另一种是整体拓扑，它是用来研究空间的大范围特征的，譬如用以区别球面和锚环的那些特征．以后我们将谈到一些整体拓扑，特别在论述微分形式的那一章中．但是我们首先必须简要地考虑一下局部拓扑．

这里的基本概念是 R^n 中一点的邻域．为了定义邻域，我们

先引入 R^n 中任意两点 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\mathbf{y}=(y_1, \cdots, y_n)$ 之间的距离函数:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}. \tag{1.1}$$

R^n 中点 $\mathbf{x}$ 的一个半径为 r 的邻域指的是与 $\mathbf{x}$ 的距离小于 r 的那些点 $N_r(\mathbf{x})$ 的集合. 图 1.1 给出 R^2 时的情况. 空间的连续性现在就可以通过考察一些非常小的邻域来更为精确地定义. R^n 中点的一个集合, 如果其中每一点都有一个不含此集合中其他点的邻域,则该集合称为离散的. 显然, R^n 本身不是离散的. 对于 R^n 中点的一个集合 S, 如果 S 中的每一点 $\mathbf{x}$ 都有一个完全被包含在 S 中的邻域, 则称 S 为开的. 显然离散集不是开的,而且从现在开始,我们将不再用到离散集. R^1 (简单地称为 R) 中开集的一个简单例子是: 对两个实数 a 和 b 定义的,满足 $a<x<b$ 的所有点 x. 搞懂下列事实是重要的: 满足 $a\leqslant x<b$ 的点的集合不是开的,这是因为点 $x=a$ 的邻域没有一个能全部被包含在此集合中: $x=a$ 的任意邻域的一些点必定比 a 小,因此在此集合外面. 图 1.2 说明了这一点. R^n 中任意合适的"一块",如果我们不把这一块的边界考虑在集合内的话,那它将是开的. 当然,这是一个非常一般的性质.

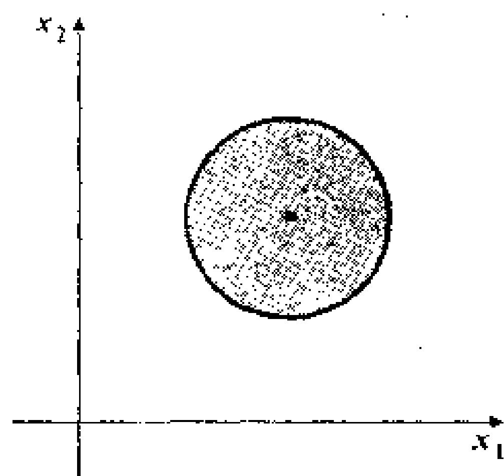


图 1.1 距离函数 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 定义了 R^2 中的一个邻域: 它是由半径为 r 的圆为边界的圆盘的内部. 圆本身不属于这一邻域.

连接 R^n 中任意两点的线可以被无限地细分,这一性质可更精确地表述如下: R^n 中的任意两点都有不相交的邻域. (它们也会有一些相交的邻域,但是只要我们选择足够小的邻域,我们

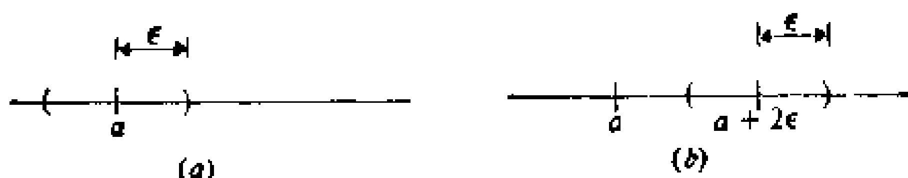


图 1.2 (a)点 $x=a$ 的任意邻域必定包括 a 左边的点，而(b) a 右边的任意点有一个完全在 a 的右边的邻域.

就可以使它们不相交.)这称为 R^n 的豪斯道夫性质. 有可能构造一些非豪斯道夫空间，但是就我们的目的来说，这样做就有点多此一举了，因而我们不考虑它们.

注意到我们用距离函数 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 定义了邻域，从而定义了开集. 我们说 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 在 R^n 上诱导了一个拓扑. 这指的是: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 使我们能定义 R^n 的开集，它们有下列性质:

(Ti) 若 O_1 和 O_2 是开的，则它们的交集 $O_1 \cap O_2$ 也是开的.

(Tii) 任意多个(可能有无限多个)开集合的并集是开的.

为了使(Ti)适用于 R^n 的所有开集，我们定义空集(或零集)是开的，并且为了使(Tii)成立，我们同样地定义 R^n 是开的. (在更高级的处理中，拓扑空间被定义为一些点的集合，其开集的定义满足(Ti)和(Tii). 就此而言，距离函数 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 使我们把 R^n 变成了一个拓扑空间.)

至此我们必须问一下: 该诱导拓扑是否密切依赖于 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的精确形式? 作为例子，假定我们用一个不同的距离函数

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [4(x_1-y_1)^2+0.1(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}, \tag{1.2}$$

也来定义邻域和开集. 对于 R^2，就如图 1.3 所示.

关键的一点是: 按 $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是开的任意集合按 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 也是开的，且反之亦然. 证明这一点并不难，这是依据在这样的事实之上的: $\mathbf{x}$ 的任意 d 型邻域包含一个全部在它之中的 d' 型邻域，且反之亦然. 也即给定 $\mathbf{x}$ 的一个半径为 ε 的 d 型邻域，我们能

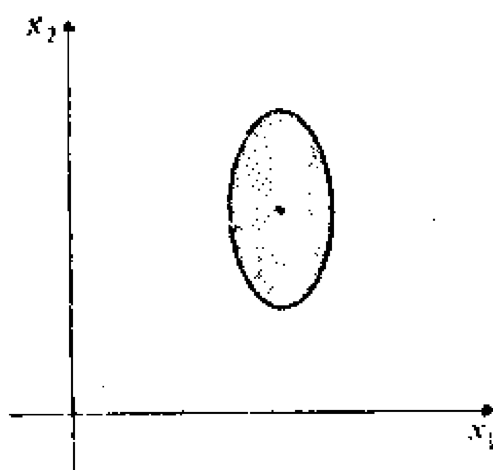


图 1.3 距离函数 $d'(\mathbf{x},\mathbf{y})=[4(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{1/2}$ 定义了 R^2 中的邻域．它是以椭圆 $4(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=r^2$ 为边界的椭圆盘的内部．和图 1.1 中一样，该椭圆本身不在此邻域之中．

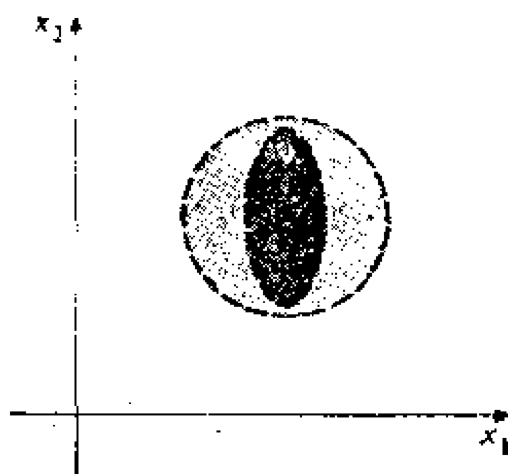


图 1.4 在 R^2 中，若 $\delta<\varepsilon$，则半径为 ε 的一个 d 邻域（以图中的圆为边界）完全包含一个半径为 δ 的 d' 邻域（以图 1.3 中所定义的椭圆为边界）．若 $\delta>2\varepsilon$，则包含关系反过来．

找到一个数 δ，它小到使得 $\mathbf{x}$ 的半径为 δ 的 d' 型邻域完全被包含在前者之中（参看图 1.4）．因此我们得到结论：按 $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 定义的开集一定也是按 $d'(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 定义的开集，且反之亦然．所以我们说 d 和 d' 两者在 R^n 上诱导了同一拓扑．读者可以证明函数

$$d''(\mathbf{x},\mathbf{y})=\exp[d(\mathbf{x},\mathbf{y})]-1, \tag{1.3}$$

$$d'''(\mathbf{x},\mathbf{y})=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|) \tag{1.4}$$

也诱导出同一拓扑．它们在 R^2 中的邻域如图 1.5 所示．因此虽然我们从通常的欧几里得距离 $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 开始讨论，但是我们定义的拓扑却并不十分依赖于 d 的形式．这个拓扑称为 R^n 的“自然”拓扑．拓扑比起距离来是一个更为“原始”的概念．我们并不需要知道点之间的实际距离，因为许多不同的距离定义都能合用．我们所需要的概念仅是点之间的距离能被分得任意小，以及不存在两个不同的点，它们之间的距离为零．

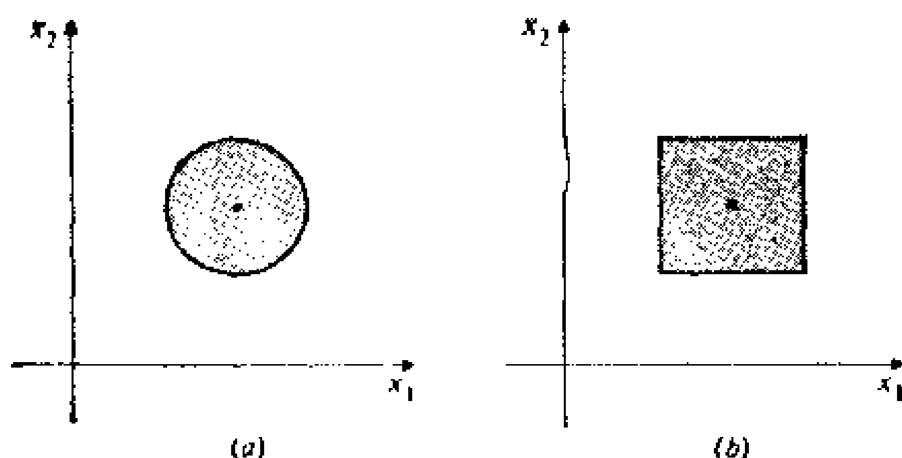


图 1.5 (a)在 R^2 中，对于给定的半径 r，距离函数 d'' 的圆形邻域比 d 的邻域小. (b)d''' 的邻域以边长为 $2r$ 的正方形为边界.

我们对邻域的上述定义是依赖于一个特别的距离函数的. 但是因为流形的拓扑比任意特定的距离函数更一般，因此“邻域”这一词常常用于不同的意义. 我们会感到，把点 $\mathbf{x}$ 的一个邻域定义为包含含有 $\mathbf{x}$ 的一个开集的任意集合是方便的. “邻域”的含义是什么，根据上下文应该清楚.

1.2 映射

映射的概念虽然很简单，但由于它在后面很有用，所以花些时间来讨论它是适宜的. 从空间 M 到空间 N 的映射 f 指的是一个法则，它使 M 的一个元 x 与 N 的一个唯一的元 y 对应. 在我们的心目中对映射有一个一般的概念(如图 1.6 所示)是有好处的. R 上通常的实值函数是映射的一个最简单的例子. 函数 f 使 R 中的一点 x 与也在 R 中的一点 $f(x)$ 对应. (这表明空间 M 和 N 不必是不同的.) 在图 1.7 中用通常方法画出了这种映射. 注意: 此映射对每一个 x 给出一个唯一的 $f(x)$，但是对每一个 $f(x)$ 不必有一个唯一的 x. 在图 1.7 中，x_0 和 x_1 映射为同一值，这种映射称为**多对一的**. 更一般地，如果 f 把 M 映射到

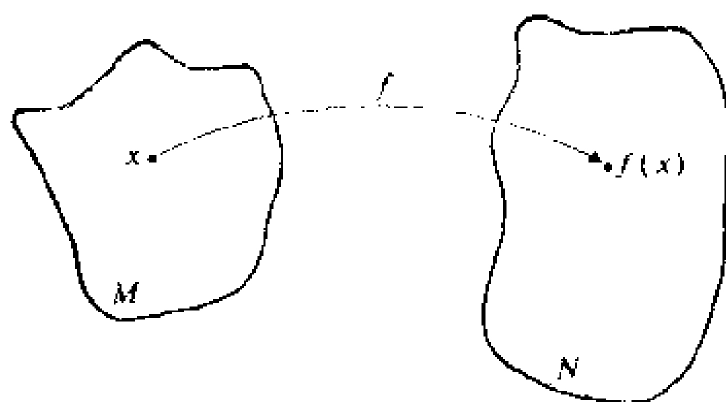


图 1.6　映射 $f:M\to N$ 的图形表示．图中画出了 $x\mapsto f(x)$．

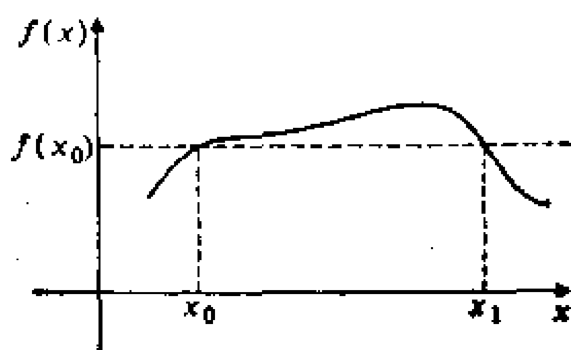


图 1.7　R 到 R 的一个多对一映射(函数)．

N，那么，由 M 中任意集合 S 中的点映成的 N 中的元所构成的集合 T，称为 S 在 f 下的象，记为 $f(S)$．反过来，集合 S 称为 T 的逆象，记为 $f^{-1}(T)$．如果映射是多对一的，则 N 的一个点的逆象可能不是 M 的一个单一的点，因此从 N 到 M 不存在映射 f^{-1}，因为每一个映射必定有一个唯一的象．因此一般来说符号 $f^{-1}(T)$ 应看成是一个整体符号：它不是 T 在映射 f^{-1} 下的象，而是一个称为 $f^{-1}(T)$ 的集合．另一方面，如果 $f(S)$ 中的每一点在 S 中有一个唯一的逆象点，则称 f 是一对一的(简记为 1-1 的)，而此时存在另一个 1-1 的映射 f^{-1}，称为 f 的逆(映射)，它将 M 的象映到 M．这些概念如果不用这些文字来描述它们的话，其实我们在初等微积分中就已经熟悉它们了．函数 $f(x)=\sin x$ 是多对一的，因为对任意整数 n，有 $f(x)=f(x+2n\pi)=f((2n+1)\pi-x)$．所以不存在真正的反函数．通常的反函数 $\arcsin y$ 或 $\sin^{-1}y$ 是通过把原来的正弦函数限制在"主"值 $-\pi/2<x\leqslant\pi/2$ 中而得到的；在这一范围里，它确实是 1-1 的，且是可逆的．

地球一部分表面的地图映射是 1-1 映射的另一个例子：它把地球表面上的一点映到纸上的一点．球面关于它某一直径的转动是另一种映射：它把球面上一点映到偏开(关于转动轴测量的)一定角距离的另一点．

我们现在引入有关映射的一些标准符号和术语．f 把 M 映到 N 的这一说法简记为 $f:M\to N$．f 把 M 的一个特定元 x 映为 N 的 y，用特定记号 $f:x\mapsto y$ 表示．如果映射为 f，则点 x 的象是 $f(x)$．当映射是 n 个变量的实数值函数时(因此 $f:R^n\to R$)，物理学家习惯上既用符号 $f(x)$ 来表示 f 在 x 点的值，又用它来表示该函数本身．在不致引起误会的情况下，我们将采用这一常规．如果我们有两个映射 f 和 g，$f:M\to N$ 和 $g:N\to P$，则存在一个称为 f 和 g 的复合映射，记为 $g\circ f$，它把 M 映到 $P(g\circ f: M\to P)$．它的定义是明显的：取 M 的一点 x，找出 N 的点 $f(x)$，再利用 g 把它映到 P 中去：$(g\circ f)(x)=g(f(x))$．书写复合映射 $g\circ f$ 时，习惯上把先作用的映射写在右边．

如果映射对 M 的所有点都有定义，则称它是一个从 M 到 N 中的映射．此外，如果 N 的每一点都有一个逆象(不必是唯一的)，我们则称它是一个从 M 到 N 上的映射．如上所述，如果逆象是唯一的，则映射是一对一的．(既是 1-1 的又是上的映射，称为是一个双射．)作为一个例子，设 N 是 R^2 中的单位开圆盘，即 N 是所有满足 $d(\mathbf{x},\ \mathbf{0})<1$ 的点的集合(这里 $\mathbf{0}$ 是 R^2 的原点)．设 M 是单位球面上 $\theta<\pi/2$ 的半球面(参看图 1.8)．显然存在从 M 到 N 上的一个 1-1 映射 f．

映射理论的术语加上我们已经学过的拓扑，使我们对连续函数(或事实上任意连续映射)能给出一个有用的和简洁的定义．对于映射 $f:M\to N$，如果 N 的任意含有 $f(x)$ 的开集包含 M 的一个开集的象(这当然预先假定了 M 和 N 都是拓扑空间，

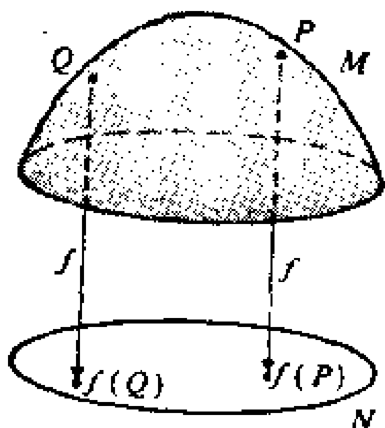


图 1.8　把圆盘想象为以球面为边界的球的赤道截面，我们通过垂直于该圆盘作投影就能构造一个简单的映射。

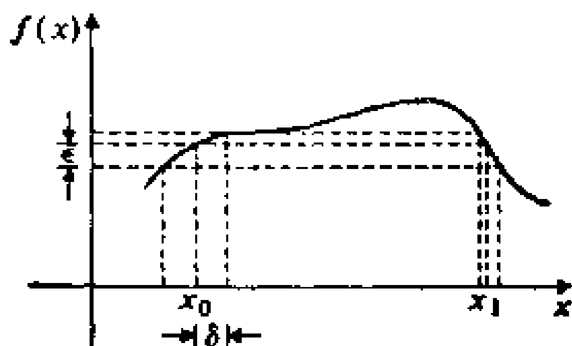


图 1.9　按文中所述定义的一个连续函数．注意，f 将 x_0 的半径为 δ 的邻域映为 $f(x_0)$ 的半径为 ε 的邻域，而后一邻域的逆象包含了前一邻域，但不一定与它相等．它可以包含 x 轴的其他区域，譬如右边所示的区域．如果 f 在这第二邻域中也连续，则其逆象将是一个开集．

否则的话，该连续是没有意义的），则 f 在 M 中的 x 点是连续的．更一般地，如果 f 在 M 的所有点连续，则 f 在 M 上连续（或简称连续）．现在让我们来看一下这个定义与初等微积分中对连续函数的通常定义是如何联系的．

假定 f 是单实变量的一个实值函数，即 f 是 R 到 R 的一个映射：它使数 x 对应于数 $f(x)$．（用上述记号，则为 $f:R\to R$.）在初等微积分中，f 在 x_0 点连续指的是，如果对每一个 $\varepsilon>0$，都存在一个 $\delta>0$，使得对所有满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 x，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$（参看图 1.9）．为了用开集的概念重新表述这一切，我们注意到在 1.1 节中定义的距离函数 $d'''(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$，在 R 的情况下简化为 $d'''(x, x_0)=|x-x_0|$．所以这个初等定义等于说：如果 $f(x_0)$ 的每一个 d''' 邻域包含 x_0 的一个 d''' 邻域的象，那么 f 在 x_0 点是连续的．因为这些邻域是开集，所以上一段中给出的连续性的新定义就包含了初等微积分的定义，并把它作为一个特殊情况．反过来，初等微积分对连续性的定义也包含了新

的定义. 这是因为 R 中包含 $f(x_0)$ 的任意开集包含 $f(x_0)$ 的一个 d'' 邻域, 后者反过来又包含含有 x_0 的一个开集的象(即 x_0 的一个 d''' 邻域的象). 因此这两个定义是等价的.

映射在 M 的所有点连续的条件甚至更容易用话来表示. 因为有这样一个定理: $f: M \to N$ 是连续的, 当且仅当 N 的每一个开集的逆象在 M 中都是开的. 这一定理并不难证明, 如果 f 在所有 x 点连续, 则任一开集的逆象是开的, 因为它包含一个含有逆象中每一点的开集. 反过来, 如果 N 的每一个开集的逆象是开的, 则它包含关于它任意点的一个开集, 因此 f 在这些点上都连续.

连续性的开集定义比 ε-δ 定义来得更容易使用和理解, 对多于一个变量的函数来说, 尤其是这样. 自然前者也是能应用于拓扑空间之间的一般映射上去的唯一可能的定义.

定义了连续性以后, 我们就可以用通常的方式来定义函数的微分. 如果 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是定义在 R^n 的某一开区域 S 上的函数, 它的小于及等于 k 阶的所有偏导数都存在, 且都是 S 上的连续函数, 则称 f 是 C^k 类可微的. 我们也把这样的函数 f 简称为 C^k 函数. C^0(连续)函数和 C^∞ 函数(它的所有导数都存在, 通常称为无限可微函数)是它的特殊情况. C^k 类中的一个函数显然也是 C^j 类函数, 这里 $0 \leqslant j < k$. 也可以对更一般的连续映射定义微商. 通常把它们称为该映射的微分. 有兴趣的读者可以参阅参考文献中的 Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette & Dillard-Bleick(1977), 或 Warner(1971).

若 f 是从 R^n 的一个开集合 M 到 R^n 的另一个开集合 N 上的一个 1-1 映射, 则它可以具体地表达成

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad 或 \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

这里 $\{x_i, i=1, \cdots, n\}$ 定义了 M 的一个点 $\mathbf{x}$, 而 $\{y_i, i=1, \cdots,$

$n\}$ 同样定义了 N 的一个点 $\mathbf{y}$. 如果函数 $\{f_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 都是 C^k 可微的，则称此映射为 C^k 可微的. 一个 C^1 映射的雅可比矩阵是由偏导数 $\partial f_i/\partial x_j$ 组成的矩阵. 此矩阵的行列式简称为雅可比，或 J，且常常被表示为

$$J=\partial(f_1,\ \cdots,\ f_n)/\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n). \tag{1.5}$$

如果此雅可比在 $\mathbf{x}$ 点不为零，则反函数定理保证映射 f 在 $\mathbf{x}$ 的某一邻域中是1-1的和到上的(其证明请参看 Choquet-Bruhat et al., 1977).

如果函数 $g(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 通过下列法则映为函数 $g_*(y_1,\ \cdots,\ y_n)$：

$$g_*(f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ f_n(x_1,\ \cdots,\ x_n))=g(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

(即 g_* 在 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 点的值等于 g 在 $\mathbf{x}$ 点的值)，则 gJ 在 M 上的积分与 g_* 在 N 上的积分相等①：

$$\int_M g(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\int_N g_*(y_1,\ \cdots,\ y_n)\,J\,dy_1\cdots dy_n. \tag{1.6}$$

因为 g 和 g_* 在适当的一些点上有相同的值，我们就常常说体积元 $dy_1\cdots dy_n$ 变换成 $J\,dx_1\cdots dx_n$. 如果把映射 f 看成是一个坐标变换时，上述说法是特别有用的. 尽管读者们在多变量的微积分中已熟知这一点，但是我们在 2.25 节和 4.8 节中还要更详细地去考察它.

1.3 实分析

正如已提到的，我们假定读者熟悉多元微积分. 在本节中我们将只讨论一些重点.

---

① 原书误为 g 在 M 上的积分与 g_*J 在 N 上的积分相等. 相应的错误也出现在 1.6 节及 1.6 节下面关于体积元的变换上，现都已一一改正. ——译者注

对于单实变量的实函数 $f(x)$，如果它在点 x_0 有一个在 x_0 的某一邻域中收敛于 $f(x)$ 的泰勒展开：

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}+\frac{1}{3!}(x-x_0)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x_0}+\cdots, \tag{1.7}$$

则称它在 $x=x_0$ 处解析．自然，如果函数在点 x_0 不是无限可微（即对某一个 n，$(\mathrm{d}^nf/\mathrm{d}x^n)_{x_0}$ 不存在），则它就不是解析的．但是也有无限可微函数不是解析的情况．$\exp(-1/x^2)$ 是一个著名的例子，在 $x=0$ 处，它的值及它的所有导数的值都为 0，但是它在 $x=0$ 的任意邻域中并不恒等于 0．（这可由下列事实解释：这一函数在解析延拓到复平面上时，在点 $z=0$ 处有一个本性奇点；不过，它在实轴上却有很好的性质．）然而，在下述意义上，知道解析函数是许多非解析函数很好的近似，那我们就可放心了．在 R^n 的一个开区域 S 上定义的实值函数 $g(x_1,\cdots,x_n)$，如果多重积分

$$\int_S[g(x_1,\cdots,x_n)]^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.8}$$

存在，则称为是平方可积的．在泛函分析中有一个定理：任意平方可积函数 g 都可以用一个解析函数 g' 来逼近，使得 $(g-g')^2$ 在 S 上的积分任意小．由此，物理学家就毫不犹豫地假定给定的函数是解析的（如果这样做有利于得到结果的话），我们有时就采用这一惯例．因为 C^∞ 函数不一定是解析的，所以对解析函数就有一个特殊的符号：C^ω．当然，C^ω 函数是 C^∞ 的．

作用在函数（定义在 R^n 上）上的算子 A，是把函数 f 映成另一函数 $A(f)$ 的映射．如果 $A(f)$ 正是 gf（这里 g 是另一函数），那么此算子简单地就是乘积．作用在 R 上函数的另一些算子可以是简单的微分，例如说

$$D(f)=\partial f/\partial x,$$

或者是关于一个固定的核函数 g 的积分

$$(G(f))(x)=\int_0^x f(y)g(x, y)\mathrm{d}y,$$

或者是一个更为复杂的运算，如

$$E(f)=f^2+\partial^3 f/\partial x^3.$$

在每种情况中，算子定义在或不定义在所有函数 f 上都可以. 例如，D 对不是 C^1 的函数就没有定义，而 G 对给出无界积分的函数也没有定义. 给定算子允许作用的函数的集合，事实上是算子定义的一部分，这个集合称为算子的定义域.

两个算子 A 和 B 的换位子，记作$[A, B]$，这是由下式定义的另一个算子：

$$[A, B](f)=(AB-BA)(f)=A(B(f))-B(A(f)). \tag{1.9}$$

如果两个算子的换位子为零，则它们是可换的. 在这里我们必须注意算子的定义域，$[A, B]$的定义域可能不象 A 或 B 的定义域那样大. 例如，若 $A=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, $B=x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，那么我们就可以把它们的定义域取成所有的 C^1 函数. 但是，并不是对所有的 C^1 函数 $A(B(f))$都有定义，因为其中含有二阶导数. 算子 AB 和 BA 可取所有 C^2 函数为定义域，这集合比 C^1 函数集要小. 于是，至少最初换位子$[A, B]$只能取 C^2 函数为定义域. 考虑到下述情况，在这一例子中我们能扩大定义域(也称为扩大算子，虽然并不总能这样做). 对任意 C^2 函数 f 容易得出

$$[A, B](f)=[\mathrm{d}/\mathrm{d}x, x\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x]f=\mathrm{d}f/\mathrm{d}x,$$

因为 AB 和 BA 中的二阶导数消掉了，因此我们可以把$[A, B]$简单地看成是 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$(也就是 A 本身)，从而可把它的定义域扩大到所有 C^1 函数上. 这个例子告诉我们，交换子甚至可以定义在

那些交换子积中的乘积不能作用的函数上. 当讨论微分算子时, 规定它们的定义域是 C^∞ 函数(至少在最初时), 这往往是最好的. 我们今后就这样, 因为这样一来就不必再为定义域问题担忧了.

1.4 群论

元素的一个集合 G 连同一个二元运算 (记作"·")一起, 如果满足下列公理, 则称为群.

(Gi) 结合律: 若 x, y 和 z 是 G 中元素, 则

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$$

(Gii) 右单位元: G 有一个元素 e, 对 G 中任意 x 有

$$x\cdot e=x.$$

(Giii) 右逆元: 对 G 中每一个 x, 存在 G 中的一个元素 x^{-1}, 满足

$$x\cdot x^{-1}=e.$$

一个群称为阿贝尔(可换)群, 须附加:

(Giv) 对 G 中所有 x, y 有

$$x\cdot y=y\cdot x.$$

有限个元素构成群的一个熟知的例子是 n 个物体的所有置换构成的群. 两个置换的二元运算, 是进行一次置换后再进行另一次置换得到的置换. 这个群有 $n!$ 个元素, 它的单位元是使所有物体都不变的那个"置换".

我们注意到从 (Gi) ~ (Giii) 可以推得几个简单的结论: 单位元 e 是唯一的, 它也是一个左单位元($ex=x$). 对任意 x, 逆元 x^{-1} 是唯一的, 且它也是一个左逆元 ($x^{-1}\cdot x=e$). 在不引起混淆时, 一般都略去符号"·", $x\cdot y$ 就简单地写成 xy.

现代物理中最重要的群是李群，以后我们将作更多的讨论。在第二章中，我们会给出一个精确的定义，但在这里我们只说它是一个**连续**群：对李群元的任意开集都有一个1-1到上的映射，把它映为R^n中的一个开集(对某个n)。R^n的平移群($\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$为常向量)是李群的一个例子。R^n的每一点$\mathbf{a}$都对应于此群的一个元素，因此事实上此群有一个到整个R^n上的1-1映射。此群的合成法则就是加法：元素$\mathbf{a}=(a_1, \cdots, a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1, \cdots, b_n)$，合成后给出$\mathbf{c}=(a_1+b_1, \cdots, a_n+b_n)$，记作$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$。这一例子也表明下列情况：不必总用符号"·"来表示群运算，对于阿贝尔群，象这个群一样，符号"+"更为通用。

群G的**子群**是G的元素的一个集合，它们在同一个二元运算下自身构成一个群。("子"总是用来表示一个与较大集合有同样性质的子集合.我们将会遇到许多带"子"的对象：向量子空间，子流形，李子代数和李子群。)作为群来说，一个子群必定有一个单位元。因为原群的单位元e是唯一的，所以任意子群必含有e。对于置换群这个例子，我们可以构造出许多子群。n个物体的置换中不改变第一个物体的所有置换构成n个物体的置换群的一个子群。这是因为：(i)单位元e使第一个物体不变，(ii)这种置换的逆元也使第一个物体不变，(iii)任意两个这种置换的组合仍使第一个物体不变。事实上，这一子群与$(n-1)$个物体的置换群是一致的。读者试证一下，所有**偶**置换的集合也是置换群的一个子群，而所有奇置换的集合**不是**一个子群。

我们讲到过，n个物体的置换群的某一子群与$(n-1)$个物体的置换群是"一致的"，这是群的**同构**的一个例子。分别具有二元运算"·"和"*"的两个群G_1和G_2，若存在从G_1到G_2上的一个1-1映射f，它保持群运算：

$$f(x\cdot y)=f(x)*f(y), \tag{1.10}$$

则称它们是同构的(这正是意味着它们的群性质是一致的). n 个物体的置换群中只置换后面$(n-1)$个物体的子群,其元素可映为$(n-1)$个物体的置换群中的同样的置换,在这个例子中同构是浅显的. 但是同构并不总是那么浅显的. 设 G_1 是由正实数以乘积运算构成的群,设 G_2 是所有实数以加法运算构成的群.(它们为什么成群?),若 x 是 G_1 中的一个数,则 $f(x)=\log x$ 定义了一个满足(1.10)式的映射 $f:G_1\to G_2$:

$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

这两个群是同构的,而 f 是一个同构.

两个群之间的另一个有用的关系是群同态. 它与同构只有一个差别,即同态映射可以是多对一的,且可以只是到中的(参见1.2节中的术语). 但式子(1.10)仍必须满足. 群到其自身中有一个浅显的同态:群的每一个元素都映为单位元 e. 从置换群到元素仅为$\{1, -1\}$的乘法群上有一个稍为复杂一点的同态. 此同态把任意偶置换映为1,把任意奇置换映为 -1. 读者对此例可验证一下(1.10)式,即证明两个奇置换的组合是偶的,一个奇置换和一个偶置换的组合是奇的,而两个偶置换的组合是偶的.

1.6 线性代数

对于集合 V,如果它在一个记为"+"的二元运算下是阿贝尔群(参见上述),以及定义了一个实数乘法(·),且满足下面的公理(其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是向量,而 a, b 是实数):

$$\text{(Vi)}\ a\cdot(\bar{x}+\bar{y})=(a\cdot\bar{x})+(a\cdot\bar{y}),$$

$$\text{(Vii)}\ (a+b)\cdot\bar{x}=(a\cdot\bar{x})+(b\cdot\bar{x}),$$

$$\text{(Viii)}\ (ab)\cdot\bar{x}=a\cdot(b\cdot\bar{x}),$$

$$\text{(Viv)}\ 1\cdot\bar{x}=\bar{x}.$$

则该集合是一个(实数上的)向量空间．V 的单位元记为 $\bar{0}$，或简记为 0．除了向量空间的通常例子外，注意下面两个向量空间：

（i）所有 $n\times n$ 矩阵的集合．这里的"+"是把相应的矩阵元相加，而"·"是用实数乘每一个矩阵元．

（ii）定义在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的所有连续实函数 $f(x)$ 的集合．

习惯上省略这些公理中的乘号和括号，象

$$a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z} \tag{1.11}$$

这样的表达式称为向量 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 的一个线性组合．对 V 的元素 $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m\}$，如果找不到不全为零的实数 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，使得

$$a_1\bar{x}_1+a_2\bar{x}_2+\cdots+a_m\bar{x}_m=0, \tag{1.12}$$

则称这个集合是线性无关的．如果在这个集合中加上 V 的任意其他向量就会使它线性有关，则这一集合是极大线性无关集．这一定义意味着 V 中的任意其他向量都能表示为一个极大集中元素的一个线性组合．因此一个极大集构成 V 的一个基．例如，如果 V 是 $n\times n$ 实矩阵集合，那么只有一个矩阵元为 1，而其他元均为 0 的 n^2 个不同矩阵的全体就构成了 V 的一个基．一般地，基中向量的个数便是 V 的维数．(如果基中元素的个数是有限的，则所有基都有相同数目的元．)设向量 $\{\bar{x}_i, i=1, \cdots, n\}$ 是一个基，于是任意向量 $\bar{y}$ 可表示成

$$\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{x}_i. \tag{1.13}$$

数 $\{a_i, i=1, \cdots, n\}$ 称为 y 在此基中的分量．

向量空间 V 的一个子空间指的是 V 的一个子集合，其本身也是一个向量空间．(请与 1.4 节中关于子群的定义加以比较．)

尤其是，子空间必包含零向量及其中任意个元素的所有线性组合．对于任意向量集合 $\{\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_m\}$，如果子空间由所有可能的线性组合

$$a_1\bar{y}_1+a_2\bar{y}_2+\cdots+a_m\bar{y}_m$$

所构成，则称此向量集生成该子空间．如果 $m<n$，则此子空间必是一个真子空间，即它与 V 不一致．在任何情况下，子空间的维数是生成元中最大的线性无关向量的个数．

到现在为止，我们还没有谈到向量的内积或长度．这是一些附加上去的概念，它们在有关向量的特殊应用中可能有用或无用，所以没有必要把它们强加在向量空间上．引进它们的方法之一是在向量空间中定义范数．一个赋范向量空间指的是带有一个从 V 到实数中的映射（即一个函数，它对每一个向量确定一个称之为它的范数的实数）的向量空间，而这个映射满足下述公理：

(Ni) $n(\bar{x})\geqslant 0$（对 V 中所有 $\bar{x}$），$n(\bar{x})=0$，当且仅当 $\bar{x}=\bar{0}$；

(Nii) $n(a\bar{x})=|a|n(\bar{x})$（对 R 中所有 a 及 V 中所有 $\bar{x}$）；

(Niii) $n(\bar{x}+\bar{y})\leqslant n(\bar{x})+n(\bar{y})$（对 V 中所有 $\bar{x}, \bar{y}$）.

有许多函数满足这些公理，例如把 R^n 本身看成一个向量空间，这里加法定义为

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n), \tag{1.14}$$

而向量与实数的相乘定义为

$$a\mathbf{x}=(ax_1, \cdots, ax_n). \tag{1.15}$$

于是，对应 1.1 节定义的四个距离函数中的三个，我们可以如下地定义范数，即向量与原点的"距离"：

$$n(\mathbf{x})=[(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2]^{1/2}, \tag{1.16}$$

$$n'(\mathbf{x})=[4(x_1)^2+0.1(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2]^{1/2}, \tag{1.17}$$

$$n'''(\mathbf{x})=\max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|). \tag{1.18}$$

读者可试证一下，这些范数满足公理(Ni)～(Niii)．另外，也试证一下由 $d''(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 不能定义一个范数．

前面两个范数不同于第三个范数，因为它们还满足一个我们希望加上去的附加公理(平行四边形法则)：

(Niv) $[n(\bar{x}+\bar{y})]^2+[n(\bar{x}-\bar{y})]^2=2[n(\bar{x})]^2+2[n(\bar{y})]^2$.

这种范数使我们能定义两个向量的双线性对称内积

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{1}{4}[n(\bar{x}+\bar{y})]^2-\frac{1}{4}[n(\bar{x}-\bar{y})]^2. \tag{1.19}$$

双线性指的是

$$(a\bar{x}+b\bar{y})\cdot\bar{z}=a(\bar{x}\cdot\bar{z})+b(\bar{y}\cdot\bar{z}), \tag{1.20}$$

和

$$\bar{z}\cdot(a\bar{x}+b\bar{y})=a(\bar{z}\cdot\bar{x})+b(\bar{z}\cdot\bar{y}). \tag{1.21}$$

对称性指的是

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{y}\cdot\bar{x}. \tag{1.22}$$

此外，这一内积是正定的，即

$$\bar{x}\cdot\bar{x}\geqslant 0;\ \bar{x}\cdot\bar{x}=0,\ \text{仅当}\quad \bar{x}=\bar{0}. \tag{1.23}$$

这很容易得到，因为 $\bar{x}\cdot\bar{x}=[n(\bar{x})]^2$.

上面定义的 R^n 上的范数 $n(\mathbf{x})$ 称为欧几里得范数．当我们把 R^n 看成是一个带有这种范数的向量空间时，我们把它记作 E^n，并且把它称为 n 维欧几里得空间．记住 R^n 和 E^n 之间的区别是重要的．R^n 简单地就是所有 n 重数 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的集合，并没有任何距离、向量性质或范数的含义．作出这一区别的目的在第二章中就会清楚的．

为了定义内积且证明它是双线性和对称的，事实上只要用到范数公理中的(Nii)和(Niv)．伪范数指的是一个不满足(Ni)和(Niii)的范数，即向量与其本身的内积不必是正的．狭义相对论是使用伪范数的物理理论的一个例子，今后我们将较为详

细地考虑这一情况。

虽然我们只定义了实数上的向量空间，但定义一个复数上的向量空间也是容易的，这只要允许(Vi)～(Viv)中的数 a 和 b 为复数就可以了。于是一个向量可以有复分量。在量子力学中通常使用这种向量空间。

1.6 方阵代数

向量空间 V 的一个线性变换 T 指的是 V 到其自身的一个映射，它满足线性律(比较等式(1.20)和(1.21))：

$$T(a\bar{x}+b\bar{y})=aT(\bar{x})+bT(\bar{y}). \tag{1.24}$$

如果 $\{\bar{e}_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 是 V 的一个基，则

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i, \tag{1.25}$$

$$T(\bar{x})=T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iT(\bar{e}_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\bar{e}_j, \tag{1.26}$$

这里我们已把每一个向量 $T(\bar{e}_i)$ 用它的分量形式 $\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\bar{e}_j$ 来表示。故 T_{ij} 称为 T 的分量，而且可以用一个 $n\times n$ 方阵来表示。

读者会感到方便的一个非常重要的代数结果是：

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\left(\sum_{j=1}^{m}B_{ij}C_j\right)=\sum_{j=1}^{m}C_j\left(\sum_{i=1}^{n}B_{ij}A_i\right), \tag{1.27}$$

即求和的次序是无关紧要的。因此，习惯上把上面的表达式记为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A_iB_{ij}C_j,\qquad \text{或简记为}\qquad \sum_{i,j}A_iB_{ij}C_j, \tag{1.28}$$

这强调了这个和式就是指标的所有可能结合的各种乘积的和式。

相继作用在空间 V 上的两个线性变换 T 和 U，给出变换 UT：

$$UT(\bar{x})=U(T(\bar{x}))=U\left(\sum_{i,j}a_iT_{ij}\bar{e}_j\right)=\sum_{ijk}a_iT_{ij}U_{jk}\bar{e}_k$$

$$=\sum_{ik}a_i\left(\sum_jT_{ij}U_{jk}\right)\bar{e}_k. \qquad (1.29)$$

由此得到 UT 的分量是

$$\sum_jT_{ij}U_{jk}. \qquad (1.30)$$

知道下面这一点是重要的：如果把 T_{ij} 表示成一个矩阵（i 是行指标，j 是列指标），对 U_{jk} 也这样，则和式 (1.30) 正是它们各自的矩阵的矩阵乘积．一般地说，若 A_{ij} 和 B_{ij} 是矩阵，则它们的矩阵乘积是

$$(AB)_{ik}=\sum_jA_{ij}B_{jk}=\sum_jB_{jk}A_{ij}, \qquad (1.31)$$

$$(BA)_{ik}=\sum_jB_{ij}A_{jk}=\sum_jA_{jk}B_{ij}. \qquad (1.32)$$

注意等式(1.31)中的第三个表达式与第二个表达式相等，这是因为每个 A_{ij} 和 B_{ij} 都是数，而数的相乘是可换的．比较(1.31)式的第三个表达式和(1.32)式的第二个表达式，我们看到，重要的不是（数字）因子的次序，而是求和指标和自由指标的位置．这两个表达式的不一致，说明矩阵乘法一般是不可换的．

矩阵 A 的转置 A^{T}，具有元素

$$(A^{\mathrm{T}})_{ij}=A_{ji}. \qquad (1.33)$$

（如果 A 是复的，我们用 $(A^*)_{ij}=\bar{A}_{ji}$ 定义 A 的伴随 A^*，这里符号“$-$”表示复共轭．）单位矩阵 I，其主对角线上的元素为 1，其他元素为 0．这可表示如下：

$$(I)_{ij}=\delta_{ij}, \qquad (1.34)$$

这里 δ_{ij} 是克罗尼克尔 δ 符号，当 $i=j$ 时，它为 1；$i\neq j$ 时，它为

0. 恒等变换是把任意向量 $\bar{x}$ 映为它自己的变换. 在任意基下, 它的分量都是 δ_{ij}. 矩阵 A 的逆 A^{-1} 是满足

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{1.35}$$

的矩阵. 并不是每一个矩阵都有逆矩阵的, 零矩阵就显然没有逆矩阵. 如果有逆矩阵存在, 则它是唯一的. 显然 A 是 A^{-1} 的逆矩阵, 如果 A^{-1} 存在, 则称 A 是非奇异的. (否则是奇异的.) 所有 $n\times n$ 的非奇异矩阵集合以矩阵乘法为运算构成一个群. 此群的单位元是矩阵 I. 这是一个非常重要的李群, 记作 $GL(n, \mathbb{R})$, 在第三章中我们将仔细地研究它.

2×2 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的行列式记作 $\det(A)$, 其定义为

$$\det(A) = ad - bc. \tag{1.36}$$

$n\times n$ 矩阵的行列式是用下列余因子法则通过对 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的归纳来定义的. A 的矩阵元 a_{ij} 的余因子记为 a^{ij}, 定义为用 $(-1)^{i+j}$ 乘以在 A 中划去 a_{ij} 所在的行和列后, 所得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式. 于是在矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

中, a 的余因子是 $ek-fh$, 而 f 的余因子是 $bg-ah$. 因此 A 的行列式定义为

$$\det(A) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^{ij}\right), \text{对任意固定的 } i. \tag{1.38}$$

对矩阵(1.37), 取 $i=1$, 给出

$$\det(A) = a(ek-fh) + b(fg-dk) + c(dh-eg),$$

取 $i=2$，给出

$$\det(A)=d(hc-bk)+e(ak-cg)+f(bg-ah),$$

这两个表达式是相等的. 当用这种方法表述时，这一法则看来非常难以理解. 当我们在 4.12 节中再来看它时，就能充分看出其意义了.

$n\times n$ 矩阵的行(或列)可以看作某个 n 维向量空间给定向量的分量. 矩阵的行列式为零，当且仅当由其行(或列)定义的 n 个向量是线性相关的. 这可由行列式的其他一些性质得到：用常数 λ 去乘某一行，则行列式就乘了 λ；如果某一行中的每一个矩阵元，用此元与另一行相应元的任意倍数的和来代替，则行列式不变；若任意交换两行，则行列式改变符号. 如果用“列”代替“行”，这些性质同样成立. 同样，在读了 4.12 节以后，其意义就更清楚了.

假定我们从矩阵 A 通过定义

$$b_{ij}=a^{ji}/\det(A) \tag{1.39}$$

来构造一个矩阵 B，则(1.38)式可表成

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=1,\ 对任意固定的\ i.$$

可以证明(试验一下会使您确信)：

$$\sum_{j=1}a_{ij}b_{jk}=\delta_{ik},$$

或者换言之，B 是 A 的逆矩阵，它的矩阵元由(1.39)式给出，由此得到 A 是非奇异的，当且仅当 $\det(A)\neq 0$.

矩阵元的迹是指它的对角元素的和：

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i}a_{ii}. \tag{1.40}$$

用一个非奇异矩阵 B 对 A 作相似变换是指映射 $A\mapsto B^{-1}AB$. 从我们已经给出的定义可以证明下列一些有用的公式：

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}},\tag{1.41}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},\tag{1.42}$$

$$\det(AB)=\det(A)\det(B),\tag{1.43}$$

$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB)=\operatorname{tr}(A),\tag{1.44}$$

$$\det(B^{-1}AB)=\det(A),\tag{1.45}$$

$$\det(A^{\mathrm{T}})=\det(A).\tag{1.46}$$

对 $n\times n$ 矩阵 A，如果下列等式成立：

$$A(\bar{V})=\lambda\bar{V},\tag{1.47}$$

则它有一个**本征值** λ 和一个**本征向量** $\bar{V}\neq\bar{0}$. 这里，在等式左边，A 作为一个线性变换对 $\bar{V}$ 作用. 用分量形式可以把这个方程写成下列 n 个方程：

$$\sum_j(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})V_j=0.\tag{1.48}$$

$\bar{V}$ 有一个非零解，当且仅当

$$\det(A-\lambda I)=0.\tag{1.49}$$

方程(1.49)显然是一个 n 次多项式方程，A 的本征值是它的解. 对于任意实数解 λ，都存在一个本征向量. 如果解是复的，则不存在实的本征向量；因此若 $\bar{V}$ 是属于实向量空间的，则在实和复本征值之间有一个根本的区别. 如果向量空间(以及矩阵 A)是复的，这就不必作出特别的区别了. 假定 $\{\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\}$ 是(1.49)式的 n 个根，这里如果某个根是重根，那它重复 n 次就列出 n 次. 有下列三个我们将援引的重要结果：

$$\{A^{\mathrm{T}}\text{ 的本征值}\}=\{A\text{ 的本征值}\},\tag{1.50}$$

$$\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\tag{1.51}$$

$$\operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.\tag{1.52}$$

仔细地考察(1.49)式中所示的多项式，可以证明后面两个结论. 第一个结论从(1.46)式推出.

1.7 参考文献

下列这些教科书的论述水平与本书的水平大致相当. 这里列出的书只是指出资料的水平, 并不是背景材料的一个全面指南.

初等微积分:

G. B. Thomas, *Calculus and Analytic Geometry* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960).

力学:

K. R. Symon, *Mechanics*(Addison-Wesley, Reading, Mass.,1953);

H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950);

L. Landau & E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon, New York, 1960).

热力学:

M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics* (McGraw-Hill, New York, 1957);

E. Fermi, *Thermodynamics* (Dover, New York, 1956).

电磁学:

J. R. Reitz & F. J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory* (Addison-Wesley, Reading, Mass, 1960);

J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1965).

狭义相对论:

A. P. French, *Special Relativity* (Nelson, London, 1968);

E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics* (Freeman, San Francisco, 1965).

量子力学:

L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1955).

要加深理解本章的内容可参考下列文献:

R. A. Dean, *Elements of Abstract Algebra* (Wiley, New York, 1967);

W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1964);

E. W. Packel, *Functional Analysis, a Short Course* (International Textbook Co., Glasgow, 1974);

F. Riesz & B. Sz. -Nagy, *Functional Analysis* (Ungar, New York, 1955);

A. Wallace, *Differential Topology: First Steps* (Benjamin, Reading, Mass, 1968).

下面列出以后各章的一些基本参考书. 这些书一般处理得更深透，更严格. 今后若要参考这些书，我们就给出作者的名字.

Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, *Anallysis, Manifolds, and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977). 这是为具有数学修养的物理学家写的一本专著. 内容丰富，尤以对微分方程的论述见长.

R. Abraham & J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, revised 2nd edn (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978). 正如书名所表明的，这本书比上面的那本书面要窄得多，但也就更有深度. 该书重视整体问题，且有大量参考文献. 新版在第一版的基础上增添了许多内容.

F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971). 这是数学专业的大学生容易读懂的一本入门书，尤以对李群及上同调理论的论述见长.

M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, four volumes (Publish or Perish, Boston, 1970). 正如书名所示，本书是为大学数学专业学生编写的. 该书行文酣畅，常用幽默语言，有许多很好的习题及大量详细说明.

还有许多值得一读的微分几何书籍，入门水平的有：

N. J. Hicks, *Notes on Differential Geometry* (D. Van Nostrand, New York, 1965);

R. L. Bishop & S. I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds* (Macmillan, London, 1968).

与本书一样使用"现代"方法的有：

C. T. J. Dodson & T. Poston, *Tensor Geometry* (Pitman, London, 1977). 对于许多我们仅简略地提到的论题，该书给予更详尽的论述，但该书并未讨论一般李导数及微分形式的演算. 读了本书，再想直接进修，例如说读 Choquet-Bruhat *et al.* 的书，但有困难的话，可能会感到 Dodson & Poston 一书的前半部分内容是有帮助的.

权威性的著作有：

S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, two volumes (Interscience, New York, 1963; 1969)，该书主要论述正定度规几何.

J. A. Schouten, *Ricci Calculus* (Springer, Berlin, 1954)，该书使用的符号较为老式.

向物理学家解释微分几何的一些最好的材料往往在关于广义相对论的专著中，这是不足为奇的. 在此我们推荐：

C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973)，其中有好几章讨论微分几何，其采用的方式和符号与本书相同.

S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973). 该书有一章论述微分几何，内容较深但更紧凑.

微分几何的论文：

C. W. Misner in *Relativity, Groups, and Topology*, ed. C. DeWitt & B. DeWitt (Gordon & Breach, New York, 1964). 该文涉及范围较广.

B. Schmidt in *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, ed. W. Israel (Reidel, Dordrecht, 1973). 这是一篇用现代观点写成的值得一读的导引性文章.

为物理学家编写的还有：

R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations* (Academic Press, New York, 1968);

D. Lovelock & H. Rund, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles* (Wiley, New York, 1975);

H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New Yark, 1963);

Von Westenholz, *Differential Forms in Mathematical Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1979).

第二章　微分流形和张量

要想出一个与任何连续空间无关的物理问题是困难的. 这些连续空间可以是物理上的三维空间,四维空间,经典或量子力学问题中的相空间,所有热力学平衡态的空间,也可以是一些更为抽象的空间. 这些空间虽然有不同的几何性质, 但是它们都有一些共同的东西, 即一些与它们是连续空间(而不是, 例如说分立点的格点)有关的东西. 微分几何在近代物理学中占有重要地位的主要原因是它精确地研究所有这些空间的共同性质, 其中一些最为基本的性质已被吸收到微分流形的定义中. 微分流形在数学上精确地代替了名词"空间".

2.1　流形的定义

在 1.1 节中,我们用 R^n 标记所有 n 重实数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集合. ("点"的)一个集合 M 被定义为一个流形, 如果 M 的每一个点都有一个开邻域,从它到 R^n(对某一 n)的一个开集上有一个连续 1-1 映射.(对什么是一个到某一集合上的 1-1 映射不很清楚的读者应该看一下 1.2 节.)这可简单地理解成 M 在局部上是"类似"于 R^n 的. M 的维数就是 n. 定义中仅涉及到开集而不是整个 M 和 R^n,这点是重要的, 因为我们并不想去限制 M 的整体拓扑. 讨论了 2.2 节中的球面一例后,就会清楚这一点.注意,只要求这一映射是 1-1 的,而不必保持长度或角度,或任何其他的几何对象. 在几何的这一水平上, 甚至长度还未定义. 而且我们将会遇到一些物理应用, 在其中并不需要在我

们的流形的点间引入距离的概念．在这一初步的（或"原始"的）几何水平上，我们只是要保证我们空间的局部拓扑（如1.1节中所述的）与R^n的一致．流形是一个具有这种拓扑的空间．

根据定义，映射使M的点P对应于一个n重数$(x_1(P),\cdots,x_n(P))$．这些数$x_1(P),\cdots,x_n(P)$称为P在这一映射下的坐标，这已表示在图2.1中．想象一个n维流形的方法之一是，它简单地就是一个任意集合，而在它的任意点的某一邻域中可以给出n个独立坐标．因为这些坐标事实上定义了到R^n的所需的映射．我们将采用把坐标的指标用上标来标记的标准符号，即$x^1(P)$，$x^2(P)$，$\cdots$，$x^n(P)$（不是$x(P)$的乘方！）是在此映射下的n个坐标．

讨论到此，我们对流形是什么应该有一个一般的概念了．但是，为了做得更好一些，我们还必须考察这些坐标映射的性质．假定f是M的一点P的一个邻域U到R^n的一个开集$f(U)$上的一个1–1映射，正如上面所强调的，邻域U不必包括整个M

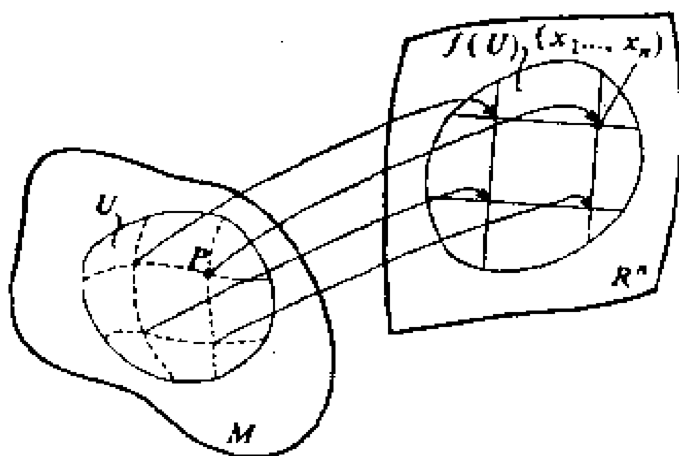


图2.1　M的一个区域U到R^n的区域$f(U)$上有一个1–1映射．这一映射使任意点，例如P，对应于唯一的n重数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．用这一方法U有一个坐标系，这在图中用虚线表示，这些虚线是R^n中通常的坐标线在f^{-1}下的象．

(在 2.2 节中我们将看到，对球面 U 不能取成整个球面)，因此必定有其他邻域及它们自己的映射，并且 M 的每一点必须至少在一个这样的邻域中．邻域及它的映射配成一对，称为一个图．容易看出，如果 M 的每一点至少属于一个邻域，那么这些开邻域必定相交，而且正是这些相交使我们能进一步给出流形的特点(参见图 2.2)．假定 V 是与 U 相交的一个邻域，而且 V 有到 R^n 的一个开区域上的一个映射 g，则这个开区域可以完全不同于 f 把 U 映成的那个开区域．V 和 U 的交集是开的(根据 1.1 节的公理(Ti))，而且由这两个映射给出两个不同的坐标系．因此存在联系这两个

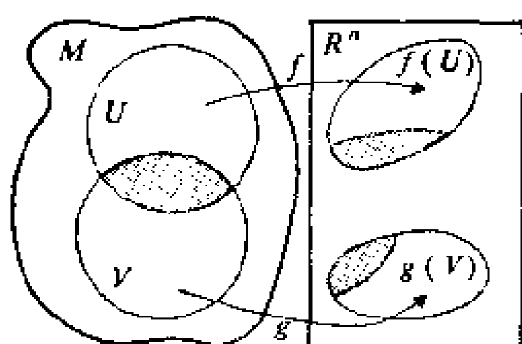


图 2.2 M 中相交的邻域 U 和 V (阴影的区域)，它们映到 R^n 的映射(f 和 g)给出了相交区域的两个不同的映射(因此有两个坐标系)．这两个坐标之间的关系表示了该流形可微分类的特性．

坐标系的方程．为了求出这一方程，从相交集合在 f 下的象中选一点(即 R^n 中的一点)，例如图 2.3 中的点$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$．映射 f 有逆 f^{-1}，因此在交集合中存在唯一的一点 S，使得它在 f 下是这些坐标．现设 g 使 S 变为 R^n 中的另一点，例如说$(y^1, y^2, \cdots, y^n)$．(我们已经构造了 $R^n \to R^n$ 的合成映射，记为 $g\circ f^{-1}$)用这种方法，我们得到了下列函数关系(坐标变换)：

$$y^1 = y^1(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$
$$y^2 = y^2(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$
$$\vdots$$
$$y^n = y^n(x^1, x^2, \cdots, x^n).$$

如果所有这些函数 $\{y^i\}$ 对于所有的$\{x^i\}$的 k 阶及小于 k 阶的偏导数都存在且连续，则称映射 f 和 g(严格地说，应是图(U, f)

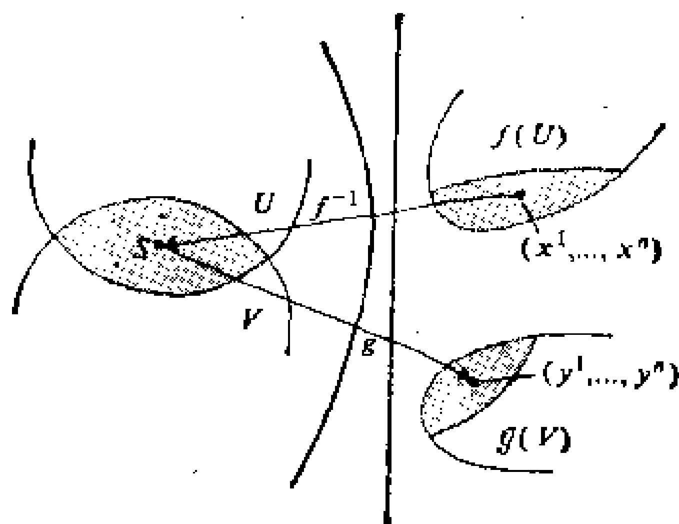


图 2.3　图2.2的放大，表明了相交部分如何给出 R^n 到 R^n 的一个映射：先施行 f^{-1}，然后施行 g（记为 $g\circ f^{-1}$）。

和$(V,\ g)$)是 C^k 相关的.（这是在1.2节中引入的关于可微性的概念.）如果可以构造一整套图（称之为一个**图集**是很恰当的），使得 M 的每一点至少在一个邻域中，而且每一个图与和它相交的任一其他图都是 C^k 相关的，则称该流形 M 是一个 C^k 流形. C^1 类（它包括 C^k, $k>1$）流形称为**微分流形**.

流形的可微性赋予它大量的结构：可以定义张量、微分形式和李导数. 这一微分结构是我们的主要课题. 记住，我们在 M 上还未引入距离的概念，而且我们还没有 M 的"形状"或"曲率"这些概念. 我们只知道它局部是光滑的，这就是下面我们所需的一切.

在大多数应用中，我们将假定有一个 C^∞ 流形，但是，这常常并不是完全必要的. 有时我们会感到假定有一个解析流形（C^ω：函数 $\{y^i\}$ 是 $\{x^i\}$ 的解析函数）是方便的，这与物理学家只要方便，就求助于解析性的做法是一致的，这在1.3节中已提到过. 我们将采用下列观点：第一次学习这一课题，为了看到微分几何里有些什么花样，对流形作出相当强的假定是有好处的. 在读

者对这一课题比较了解后，就可以考虑放宽假定了．因此，读者可以假定：在本书中，流形对我们碰巧要进行的任何论证都是足够可微的．

2.2 球面作为流形

需要一个以上图的流形的最简单例子之一是球面．（“球面”一词总是指球的表面，不包括球的内部．）考虑二维球面（记作 S^2），即 R^3 中满足 $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=$ 常数的点集．其中任意点都有一个足够小的邻域，从这个邻域到 R^2 中的一个圆盘上有一个1-1映射（参见图2.4）．这表明这个映射的确是不保长或不保角的．作为这一映射的一个特例，考虑通常的球面坐标：

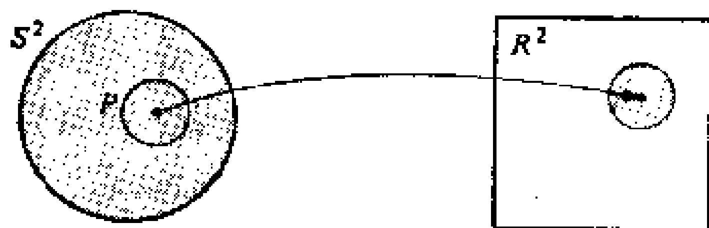


图 2.4　S^2 上一点 P 的一个小邻域 1-1 映到 R^2 中的一个圆盘上．

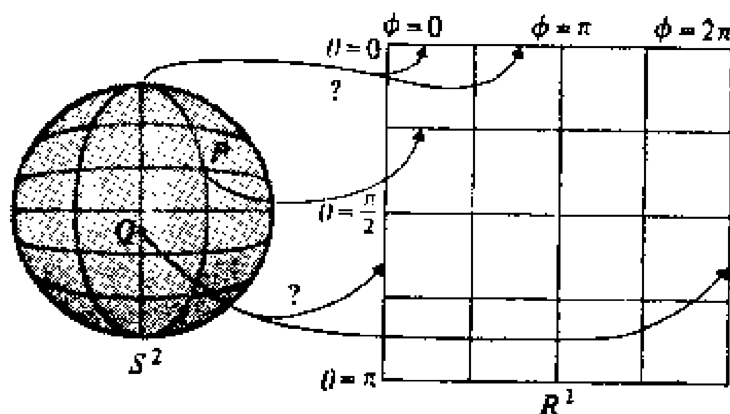


图 2.5　通常的球面坐标似乎能给出 S^2 到 R^2 的一个映射，这对如 P 那样的一般点是可行的．但是，北极的象在哪里？曲线 $\phi=0$ 上点 Q 的象有两点，取哪一点呢？

$\theta=x^1$ 及 $\phi=x^2$. 此时球面映射到长方形 $0\leqslant x^1\leqslant\pi$, $0\leqslant x^2\leqslant 2\pi$ 上, 如图 2.5 所示. 但是这里会出现一些有趣的特征. 首先该映射在极点 $\theta=0$ 处产生了问题,极点被"映为"整条线段 $x^1=0$, $0\leqslant x^2\leqslant 2\pi$. 因此在极点处, 甚至不存在映射. 第二个困难是, $\phi=0$ 的点被"映到"$x^2=0$ 及 $x^2=2\pi$ 的两处,也不存在映射. 为了避开这些问题,我们必须把映射限制在开区域 $0<x^1<\pi$, $0<x^2<2\pi$ 上. 这样两个极点及连接它们的半圆 $\phi=0$ 就在映射的定义域之外了. 因此在这里就至少需要两个映射才能完全覆盖整个球面. 第二个映射可以取为另一个球面坐标系,它的 $\phi=0$ 的曲线在第一个坐标系的赤道上, 例如说从 $\phi=\pi/2$ 到 $\phi=3\pi/2$. 于是,球面上的每一点就至少在这两个图的一个之中. 用第一个系统的坐标表示第二个系统的坐标的交迭函数是复杂的, 但它们显然是解析的. 因此,球面是一个解析流形.

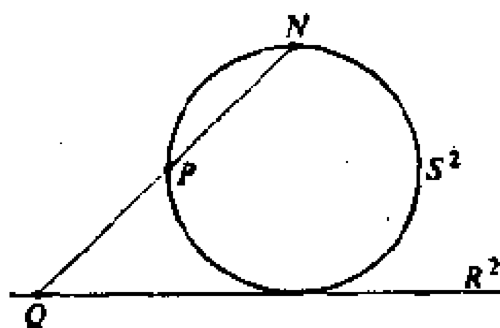


图 2.6 S^2 到 R^2 的球极映射. 集合 S^2 去掉一点 N 后是开的, 它被映为整个 R^2. 映射在点 N 处失效了.

球面到平面上的球极映射(图 2.6 是其竖直剖面图)是 S^2 到 R^2 的一个区域上的一个较好的映射,它仅在一点失效. 该球面与平面相切, 从与切点对径的 N 点作一直线, 这直线与球面相交于 P,与 R^2 相交于 Q. 这就定义了这一映射: P 映为 Q. 或者换言之, S^2 上 P 的坐标正是 R^2 中 Q 的坐标. 这一映射除了在点 N 外是1-1 的, 因为从 N 作出的直线变成水平(P 趋近 N), 点 Q 趋向无限远处. 但是不管 Q 在 R^2 中的什么方向趋向无限远处, 点 P 总趋近 N. 因此 N 映为所有的"无穷", 因而在 N 附近就需用另一个坐标片. 不存在对整个 S^2 适用的映射. 注意, 这里的全部讨论, 事实上只依赖于 S^2 的整体拓扑. 同样的

讨论也适用于诸如碗或酒杯那样的曲面，它们只是 S^2 的简单变形. 另一方面，由 R^2 的两个同心圆所围成的圆环的二维内部，却可以单独用一个坐标片来覆盖，试找一下.

2.3 流形的其他例子

流形概念的用处事实上来自于它的普遍性，它包含了那些通常并不看成是空间的集合. 根据定义，能连续参数化的任意集合 M 都是一个流形，它的维数就是独立参数的个数. 例如:

(i) 三维空间中刚体的所有转动的集合是一个流形，因为它可用三个“欧拉角”(参见 Goldstein, 1950)来连续地加以参数化.

(ii) 同样地，所有纯推动(pure boost)洛伦兹变换是一个三维流形，此时参数是该推动的三个速度分量.

(iii) 对于 N 个粒子，由它们的所有位置($3N$ 个数)和速度($3N$ 个数)定义的数组确定了 $6N$ 维流形中的一点. 这个流形称为相空间.

(iv) 给定一个独立变量为 x、因变量为 y 的(代数或微分)方程，可把所有的(y, x)构成的集合定义为一个流形. 任意特解是此流形中的一条曲线. 容易把这一概念推广到独立变量和因变量的数目为任意的情况中去.

(v) 1.5 节中所定义的向量空间是特别平常的流形. (这里我们讨论的是实数上的向量空间.)为了看出这一空间是一个流形，我们将构造一个从它到某一 R^n 的映射. 假定该向量空间 V 是 n 维的，任选一基 $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$，则任意向量 $\bar{y}$ 可以表示为一个线性组合:

$$\bar{y} = a_1\bar{e}_1 + \cdots + a_n\bar{e}_n. \tag{2.1}$$

但是 $\bar{y}$ 是 V 的一个点，这就得到从 V 到 R^n 中的映射: $\bar{y} \mapsto (a_1,$

$\cdots, a_n$). 事实上 R^n 的每一点在此映射下都对应 V 中的一个唯一向量. 因此, 不仅 V 由我们刚构造的单独一个坐标系所完全覆盖, 而且 V 作为流形全同于 R^n. 用群论的语言(1.4 节)来说, V 和 R^n 是同构的. 这是一个重要的结果. 它意味着, 如果方便的话, 每一个向量空间都可以简单地看成是 R^n.

(vi) 上述例(i)是李群的一个例子, 我们现在可以来定义李群了. 李群 G 是一个群, 它同时也是一个 C^∞ 流形, 而且加上下列限制: 群运算诱导了该流形到其自身中的一个 C^∞ 映射. 这就是说, 取该群的任意元素 a, 此元素诱导出 G 到其自身中的映射 $b\mapsto ba$(b 是 G 的任意元素), 这个映射必定是 C^∞ 的. 具体地说, 不管在 G 上采用什么坐标, ba 的坐标必定是 b 的坐标的 C^∞ 函数. 对映射的这种要求, 事实上来自相容条件, 以保证流形性质与群性质相容. 在上述例(i)中, 所有转动的集合构成一个群. 而且不难证明, 这一群结构确实是与其三维流形结构相容的. (用 SO(3) 标记这一李群.) 李群的定义可能看上去是抽象的, 而且最初看来也许是相当枯燥的, 但是在第三章中, 我们对它将会更熟悉一些. R^n 是李群的一个简单例子. 它是一个向量空间(参见上述(V)), 因此是一个群, 而且它也是一个流形. 事实上, R^n 是最简单的李群.

2.4 整体考察

因为每一个流形在局部上都与某一个 R^n 相同, 所以在微分几何这一水平上, 有相同维数的(及相同可微类)任意两个流形在局部上是不可区分的. 但当我们考察它们的整体结构时, 当然就不是这种情况了. 正如 2.2 节中所阐明的, S^2 与 R^2 不同. 作为一个例子, 球面 S^2 与粉笔的表面虽然都没有到 R^n 上的一个单独映射, 但它们具有同样的整体结构. 从一个到另一个存在

一个单独的完美的1-1上映射，这已明示于图2.7中.（精确地说，粉笔必须有非常平滑的边界，才能作为一个C^∞流形而与S^2全同.）从一个C^∞流形M到另一个N的这样一个映射，如果是1-1和C^∞的(映射是C^∞的，指的是N中点的坐标是该点在M中的逆象的坐标的无限次可微函数)，且它的逆也是C^∞的，则称它是M到N上的一个**微分同胚**.如果存在这样的一个映射，则称流形M和N是微分同胚的.茶杯的表面微分同胚于锚环(轮胎)，因为它们都有一个洞，从一个可以光滑地变为另一个.

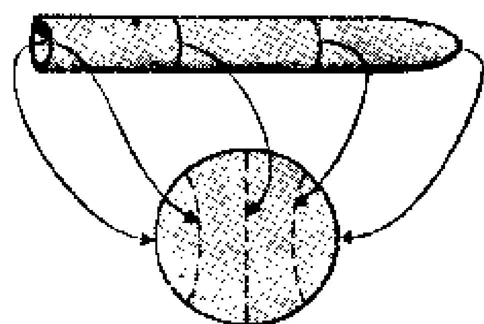


图2.7 一支光滑的(C^∞)粉笔可以1-1映射到一个球面S^2上. 该映射是整体的，并不局限在坐标片上. 这是一个微分同胚，而它的逆也是一个微分同胚.

我们在本书中讨论的大部分几何都是局部的，只依赖于微分结构. 但是在有些场合，例如在研究纤维丛和函数的积分时，流形的整体性质将是十分重要的.

2.5 曲线

流形中的曲线对我们来说是很重要的.曲线的通常概念是M中的连续点列. 这里容易下一个稍有不同的定义：曲线是R^1的一个开集合到M中的一个(可微)映射(见图2.8). 这样，我们使R^1中的一点(它是一个实数，例如说λ)对应于M中的一个点，后者称为λ的**象点**. 所有象点的集合就是通常意义下的曲线，但是我们的定义是赋予每一个点一个λ值. 显

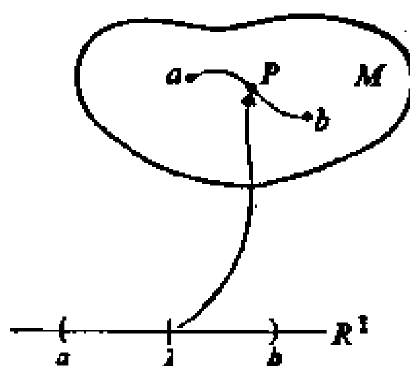


图2.8 M中的一根曲线是R^1到M中的一个映射。R^1中的点λ映为M中的P. R^1中从a到b的开区间的象是M中图示的曲线.

然，我们有了一根参数化了的曲线，其参数为λ. 因此，即使两根曲线在 M 中有同样的象，只要对象点赋予不同的参数值，它们就是不同的. 同样，所谓"可微"映射，指的就是象点的坐标$\{x^i(\lambda), i=1, \cdots, n\}$是$\lambda$的可微函数.

2.6 M上的函数

M 上的函数指的是一个法则：它对 M 中的每一点指定一个实数(函数的值). 当 M 的一个区域可微地映到 R^n 的一个区域上时，该函数变为 R^n 上的一个函数(参见图 2.9). 如果这个函数在 R^n 中可微，则称它为 M 上的一个可微函数. 可以换一种说法：函数可抽象地记为 $f(P)$，这里 P 是 M 中的一点. 但 P 有坐标，因此我们可以用一些代数表达式 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 来表示该函数的值. 如果这一表达式对其变量可微，则此函数是可微的. 坐标本身当然是连续和无限可微的函数. 例如函数 x^3 ($x^3(P)$是点 P 的第三个坐标值).

从现在起我们将避免直接提及 M 到 R^n 的这个映射，但我们将偶而提及坐标(它们描述了这个映射). 到目前为止，讨论映射的目的在于以尽可能精确的方法来建立一些基本概念. 从

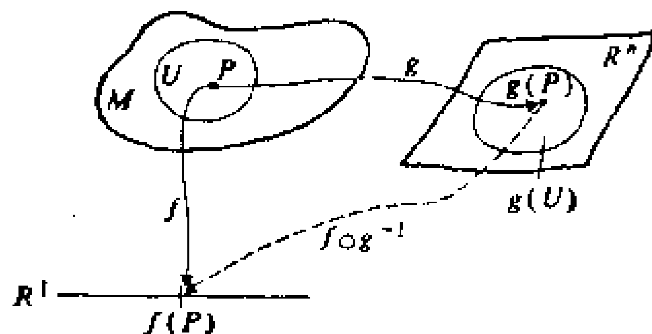


图 2.9 M 上的函数 f 是 M 到 R^1 的一个映射。从 M 的一个包括 P 的区域 U 到 R^n 的一个区域 $g(U)$ 上的坐标映射 g 有一个逆. 合成映射 $f\circ g^{-1}$ 给出 R^n 到 R^1 的一个映射，它是 R^n 上的一个函数. 这正是用 P 的坐标表示的 $f(P)$ 的表达式.

现在起，我们将把兴趣放在使用这些概念来发展流形的微分结构上. 因此我们总是假定，我们在流形上能建立坐标$\{x^i, i=1, \cdots, n\}$，而且任意足够可微的局部可逆方程组$y^i=y^i(x^j)$（即雅可比是非零的，参见1.2节）都构成一个变换成新坐标$\{y^i, i=1, \cdots, n\}$的可接受的坐标变换.

2.7 向量和向量场

考虑通过M的P点，由方程$x^i=x^i(\lambda)\ (i=1, \cdots, n)$描述的一根曲线. 再考虑$M$上的可微函数$f(x^1, \cdots, x^n)$（简记为$f(x^i)$）. 在曲线的每一点上，$f$有一个值. 所以沿着此曲线就有一个可微函数$g(\lambda)$，它给出$f$在参数值是$\lambda$的点的值：

$$g(\lambda)=f(x^1(\lambda), \cdots, x^n(\lambda))=f(x^i(\lambda)).$$

利用链规则来微分，给出

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda}=\sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{2.2}$$

这对任意函数g成立，因此我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}=\sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.3}$$

现在，依据对欧几里得空间中向量的通常看法，我们可以说，数集合$\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$是曲线$x^i(\lambda)$的切向量的分量. 这可从下面看出：$\{\mathrm{d}x^i\}$是沿曲线的无穷小位移，把它们除以$\mathrm{d}\lambda$后，只改变其数值，不改变其方向. 事实上，由于一根曲线有唯一的参数，因此每一根曲线就有唯一的集合$\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$，于是就称它们为此曲线的切线的分量. 因而根据我们对曲线的定义，每一根曲线都有唯一的切向量.

当然，依据下面两个不同的理由，每一个向量是通过P点的无穷多根不同曲线的切向量. 首先，存在许多曲线，它们彼此相

切且在P有同一个切向量；其次，是因为对相同的路径可以加以不同的参数化，而在P点给出同一个切向量. 这些已在图 2.10 中作了说明. 作为例子，我们考察简单曲线$x^i(\lambda)=\lambda a^i$，这里数$\{a^i\}$是常数. 于是，如果P是$\lambda=0$的点，则P点的切向量便是$dx^i/d\lambda=a^i$. 另一曲线$x^i(\mu)=\mu^2b^i+\mu a^i$，当$\mu=0$时也经过$P$点，且在$P$点有同样的切向量$dx^i/d\mu=a^i$. 把第一根曲线重新参数化：$x^i=(\mu^3+\mu)a^i$，它通过所有同样的点，且在$P(\mu=0)$处有同样的切向量$dx^i/d\mu=a^i$. 因此，每一个向量实际上表征了过此点的曲线的一个等价类.

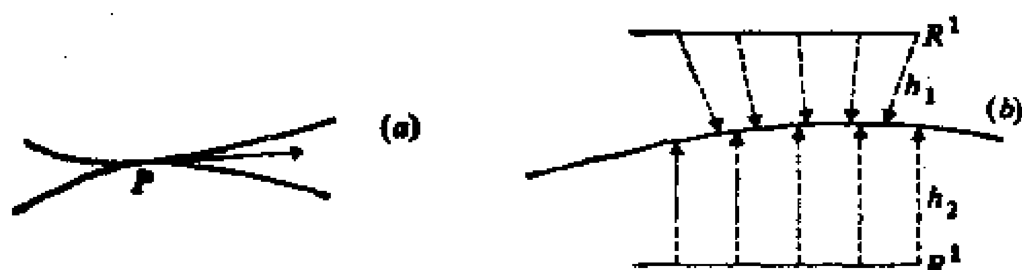


图 2.10 (a) 两根曲线有相同的切向量. (b) 两根曲线有相同的路径，但不同的参数化. 如果这些映射分别称为h_1和h_2，则映射$h_2^{-1}\circ h_1$给出这两个参数之间的一一个关系：$\lambda_2=\lambda_2(\lambda_1)$. 若在$P$点有$d\lambda_2/d\lambda_1=1$，则两切向量在$P$点相同.

"向量"这一术语的用法依赖于从欧几里得空间得来的一些熟悉的概念，它是通过与位移Δx^i的类似性来定义的. 然而，因为流形上的点之间不必有距离的联系，所以我们需要有向量的另一种定义，它只依赖于M的点的无穷小邻域. 假定a和b是两个数，而$x^i=x^i(\mu)$是过P的另一根曲线. 于是在P点有

$$\frac{d}{d\mu}=\sum_i\frac{dx^i}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

和
$$a\frac{d}{d\lambda}+b\frac{d}{d\mu}=\sum_i\left(a\frac{dx^i}{d\lambda}+b\frac{dx^i}{d\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

现在，数组$\{a\,dx^i/d\lambda+b\,dx^i/d\mu\}$是一个新向量的分量，它必定是

过 P 点的某一曲线的切向量．故而必定存在一根曲线，例如它的参数为 ϕ，在 P 点有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}=\sum_i\left(a\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

把这两个结果结合起来，在 P 点便有

$$a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}.$$

所以，沿曲线的方向导数，诸如 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$，构成 P 点的一个向量空间†．在任何坐标系中都有一些特殊的曲线，即坐标曲线本身．沿坐标曲线的导数就是 $\partial/\partial x^i$，而且(2.3)式表明任意 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 都可写成特别的导数 $\partial/\partial x^i$ 的一个线性组合．由此得到 $\{\partial/\partial x^i\}$ 是此向量空间中的一个基．因此(2.3)式表明，$\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 在这个基下具有分量 $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$．所以我们得到了一个非常值得注意的结果：$P$ 点的所有切向量的空间与沿着曲线的所有在 P 点的导数的空间有一个 1-1 的对应．依据这一点，数学家认为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 是曲线 $x^i(\lambda)$ 的切向量．我们将采用这种观点，因为这有三个好处．首先是精确，因为这并不涉及到通过有限距离的位移。其次，并不要提到坐标；尤其是，这样做并不依靠诸如"按……一样变换"的那种概念．最后，导数是沿着曲线的某种"运动"，从概念上讲，这是一个切向量所产生的；把分析中的概念——导数与几何中的概念——向量结合起来，就有一些非常有力的结果．

我们仍然保留了向量作为曲线的一个带箭号的切向量的"图象"，因为分量是完全一样的．然而，现在我们必须知道只有在同一点 P 的向量可以在一起相加，不同点的向量彼此没有关系．这些向量不在 M 中，而是在 P 点的切空间中．我们把这

† 这些导数如果要构成一个向量空间的话，那当然要服从1.5节中的其他公理．但是非浅显的仅是线性组合下的封闭性．

一空间记作 T_P. 对于通常的流形，诸如球的表面，很容易把这一切空间想象为在球面上的那一点上与球面相切的平面. 对于更一般的抽象流形想象它可能就困难了.

我们将用向量来表示 M 上给定点 P 处的一个向量. 而向量场指的是一种法则：它在 M 的每一点定义了一个向量.

2.8 基向量和基向量场

在任意点 P, 空间 T_P 是一个维数与流形维数 n 相同的向量空间. T_P 中任意 n 个线性无关向量是 T_P 的一个基. 对 M 的所有点 P, 在每个 T_P 中选一个基，我们就得到向量场的一个基. 如果我们在 P 的一个邻域 U 中有一个坐标系 $\{x^i\}$, 则这些坐标对 U 中的所有点定义了坐标基 $\{\partial/\partial x^i\}$.

但是我们也可不应用坐标基，而对任意基 $\{\bar{e}_i\}$ 来定出向量. 这里下标 i 用来给基向量编号，以区分它们. 它并不表示什么东西的分量. 在点 P, 任意向量 $\bar{V}$ 可写为

$$\bar{V}=\sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_j V^{j'} \bar{e}_j.$$

数组 $\{V^i\}$ 是 $\bar{V}$ 在 $\{\partial/\partial x^i\}$ 上的分量. 数组 $\{V^{j'}\}$ 是 $\bar{V}$ 在 $\{\bar{e}_j\}$ 上的分量，并且是按通常的向量变换规则与 V^i 联系的，这一点我们以后将会讨论. 如果把 $\bar{V}$, 基 $\{\partial/\partial x^i\}$ 和 $\{\bar{e}_j\}$ 看成向量场，那么场 $\bar{V}$ 的分量 $\{V^i\}$ 和 $\{V^{j'}\}$ 就是 M 上的函数. 如果这些函数是可微的，则称此向量场是可微的.

在上面的讨论中，我们假定(未言明)，任意坐标系的向量 $\{\partial/\partial x^i\}$ 实际上在 U 的任意点 P 都是线性无关的. 这样做为什么是正确的呢? 我们将证明这正是这些坐标在 P 点是好坐标的条件，即它们要能给出 P 的某一个邻域 U 到 R^n 的一个区域 V 上的一个 1-1 映射. 考虑 U 上的一组好坐标，例如说 $\{y^i, i=1,$

$\cdots, n\}$. 于是从$(x^1, \cdots, x^n)$到 U 的映射可以用方程组

$$y^j = y^j(x^1, \cdots, x^n),\ j=1, \cdots, n$$

表示. 根据反函数定理 (1.2 节), 当且仅当雅可比矩阵 $\partial y^j/\partial x^i$ 有一个非零的行列式, 则此映射在 U 中是 1-1 的(有逆). 这意味着在 U 的任意点, 分量为$(\partial y^1/\partial x^1, \partial y^2/\partial x^1, \cdots, \partial y^n/\partial x^1)$, $(\partial y^1/\partial x^2, \partial y^2/\partial x^2, \cdots, \partial y^n/\partial x^2), \cdots, (\partial y^1/\partial x^n, \partial y^2/\partial x^n, \cdots, \partial y^n/\partial x^n)$的这些向量是线性无关的. 但是, 它们正是向量 $\{\partial/\partial x^i, i=1, \cdots, n\}$在$\{y^j\}$系的坐标基上的分量. 因为根据链法则, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^2} + \cdots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^n},$$

对其他 x^i 也有类似的情况. 因此当且仅当$\{\partial/\partial x^i\}$在 U 的每一点是向量的基时, $\{x^i\}$才确实是 U 中的一个好坐标系. 读者可试着看一下, 球面上球面坐标的基向量在极点处是如何变坏的.

2.9 纤维丛

把流形 M 与它所有的切空间 T_P 结合在一起, 便得到一个特别有趣的流形. 图 2.11 说明了下列最简单的情况: 一个一维流形 M(一根曲线)及其切空间(在一点与曲线相切的直线). 在图 2.11 的(a)中, 我们画出了曲线及一些切空间, 这是一些与曲线相切的直线, 而且每根直线必须想象成沿两个方向无限地伸

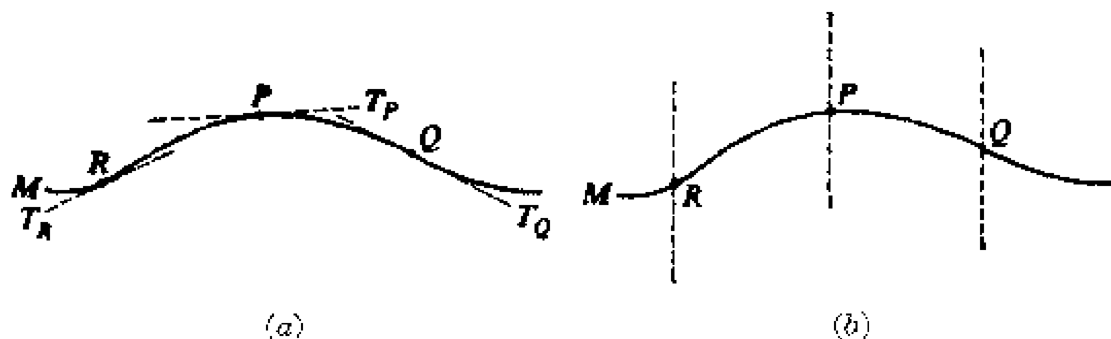


图 2.11 (a) 一个一维流形及它的一些切空间; (b) 同图(a), 只是把切空间画成彼此平行的, 以避免虚假的重合.

展出去，以便在每一点有任意长的向量．但是用这一方法画的话，图将是一团糟的，因为各个切空间杂乱无章地相交，且和曲线 M 相交．画这个图的一个更好的方法是图 2.11(b)，这里平行地画出各切空间，它们彼此并不相交，而且他们仅在定义它们的那一点处越过 M．但是不幸的是，这种图形不能表示出每个 T_P"相切"于曲线的这一事实，但是要清晰就得付出这一代价．铅垂线 T_P 上的每一点表示一个向量，具有"长度"，且在 P 点与 M 相切．图 2.11(b)还表示了一些其他情况：图(一个二维流形)中每一点是 M 的一个且仅是一个切空间中的一点，例如说是 M 的 R 点处的 T_R 中的一点．对于此图中的每一点，存在着一个且只有一个向量(位于 M 的一点且只有一点处)．这就定义了一个新的流形 TM，它包括在所有点的所有向量，因此它是两维的．它称为**纤维丛**，而纤维是对每一点 P 定义的空间 T_P．"纤维"一词源出于诸如图 2.11(b) 中的画法．为了看出 TM 确实是一个二维流形，让我们对它的一部分构造一个坐标系．设一维流形 M 有坐标 x，让我们对 M 在由某个 a 和 b 决定的区域 $a<x<b$ 中的点处，找与之相切的切空间的坐标．我们假定坐标 x 本身在这一区域中是一个好坐标．(这样假定的原因在下面的 2.11 节中将会清楚的．)在任意点 P 处的任意切向量 $\bar{V}$ 可表示为

$$\bar{V}=y\partial/\partial x, \tag{2.4}$$

因此分量 y 是 T_P 的一个坐标(比较(2.1))．显然它是整根纤维 T_P 上的一个好坐标．因为每一根纤维有一个固定的 x 值，坐标 (x, y) 确定了一个特定的向量(y)，它切于一个特定的点 (x)．因为根据定义此纤维丛上的每一点必定位于某一这种区域之中，因此我们证明了 TM 是一个流形．明显地，这种构造法容易推广到高维流形的切纤维丛上去．如果 T_P 的坐标用 M 上 P 点向

量的坐标基表示式(2.4)来决定的话，则此坐标系称为TM的自然坐标系.

现在，图2.12中用虚线画出的纤维丛中的一根曲线在M的每一点给出了一个特定的向量，因此，此曲线定义了M上的一个向量场. 这样的一根曲线(即处处不平行于纤维的一根曲线)称为TM的一个截面. 显然，去问此曲线的"长度"就没有意义了.

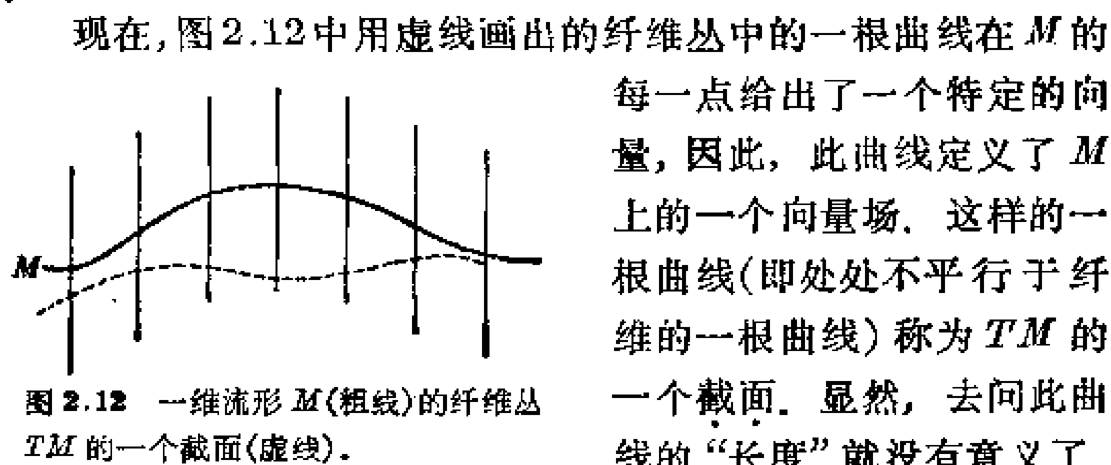


图2.12 一维流形M(粗线)的纤维丛TM的一个截面(虚线).

因此我们就有了流形的一个例子，在其上通常并不费心再去定义度规.

一般的纤维丛由一个底流形(在我们的例子中，这是曲线M)和依附在底空间的每一点上的一根纤维所组成. 如果底空间是n维的，而每根纤维是m维的，则此丛就是$m+n$维的. 它是一种特别的流形，因为它具有可以分解成纤维的性质，一根纤维上的点是彼此相关的，而不同纤维上的点是无关的. 这一点可以用定义一个投影映射π来使其正式化. 这一映射把纤维上的任意点映为这根纤维依附在底流形上的那个点. 一般的流形没有这种定义在其上的投影映射. 下面的例子给出了可以表述为纤维丛的大量空间.

*2.10 纤维丛的例子

(i) 我们考察过的纤维丛TM是由一个流形和它的切空间构成的，这称为切丛. 这是物理学中最主要的抽象流形之一. 对于一个n维流形，TM是$2n$维的.

(ii) 在本章的后面，我们将把向量场推广成张量场. 在任

意可微流形上，对每一种类型的张量都存在相应的丛.

(iii) 纤维不必与底空间的微分结构相关.考虑描述一个基本粒子状态的"内部"变量，例如同位旋．纤维是同位旋空间而底空间是时空的丛，可以用来描述粒子的位置变量(x, y, z, t)及其内部(同位旋)状态.

(iv) 牛顿所采取的对时空的看法，具有一个自然的纤维丛结构．牛顿和伽利略认为时间是绝对的：对时间的同时性每个人的看法都是一致的，而不管它们发生在什么地方．所以我们可以如下地构造一个丛：它的底空间是 R^1(时间)，而它的纤维是 R^3(空间)，正如图 2.13 所示．在不同纤维上的点(不同时间的空间点)之间没有自然的关系，因为牛顿物理中没有"绝对空间"：两个彼此有相对运动的不同观察者对什么构成了空间的一个固定点看法是不一致的．因此，虽然存在以 R^1 为底空间的自然纤维丛结构，但是不存在一个以 R^3 为底空间的自然纤维丛结构.爱因斯坦相对论的一个结果是破坏了这一丛结构，而代之以另一种结构：度规结构(参见下面的 2.31 节).

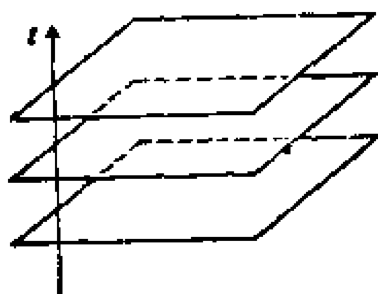


图 2.13 牛顿(伽利略)时空的自然纤维丛结构，它可分解为普适时间为常数的瞬时切片.

*2.11 对纤维丛深入考察

为了评价纤维丛概念的丰富内容和有用性，我们应该考察与纤维丛有关的两个方面．这就是它的整体性和在其结构中群的重要性.

为了理解纤维丛所具有的有趣的整体性质，我们首先必须定义一个较为简单的概念，即乘积空间.有两个空间 M 和 N，就

有一个相伴的(笛卡儿)乘积空间$M\times N$，它由所有有序对(a,b)构成，其中a属于M，而b属于N．例如，R^2可定义为乘积$R^1\times R^1$．如果M和N是流形，则$M\times N$显然也是一个流形：M的一个开集U的坐标集合$\{x^i, i=1, \cdots, m\}$与N的一个开集V的坐标集合$\{y^i, i=1, \cdots, n\}$构成$M\times N$的开集(U, V)的$m+n$个坐标的集合．从纤维丛的上述构造法显然可知，纤维丛至少在局部上是乘积空间：底流形B的一个开集U与表示一根标准纤维的空间F(所有纤维都与F全同)的乘积$U\times F$．这事实上构成纤维丛的一部分定义：它是局部平凡的(当我们考察B的局部区域时，它是一个乘积空间)．有兴趣的问题是，它是否是整体平凡的：即是否整个纤维丛可以表示为乘积$B\times F$．

其答案通常是否定的，我们将给出两个例子来说明这个问题及其解答的意义．

(i) 考察TS^2，即二维球面S^2上的切丛．如果它是整体平凡的，则存在TS^2到$S^2\times R^2$(标准纤维(切平面)是R^2)上的一个C^∞ 1-1映射(一个微分同胚)．考察$S^2\times R^2$中具有$(P,\bar{V})$形式的点的集合，其中P是S^2的任一点，而$\bar{V}$是R^2中给定的固定向量．于是上述映射的逆给出TS^2的一个处处不为零的截面，即在S^2上定义了一个处处不为零的C^∞向量场．但是事实上在S^2上不存在处处不为零的C^∞向量场．这是有名的但又是困难的球面固定点定理的一个结果：S^2到其自身上的每一个1-1映射(微分同胚)至少使S^2的一个点固定不动．正如我们在3.1节中将要看到的，一个处处非零的向量场会产生一个没有不动点的映射．所以TS^2没有一个整体的乘积结构．这就是所谓丛不是平凡的一个例子，其原因是底流形S^2的拓扑．

(ii) 第二个例子表明，甚至当底空间允许一个平凡丛时，我们确实还可以构造一个非平凡丛．考察圆S^1的切丛TS^1，不

象 S^2，圆允许一个处处不为零的连续向量场，而 TS^1 与积空间 $S^1\times R$ 全同，这已明示于图 2.14 中。这正是图 2.11(b)所示的局部图形的整体描述。但是，假定我们在图 2.14 中的 P 点处"剪开"此圆，且把此丛展开放平，如图 2.15 所示。为了从图 2.15 重新得到 2.14，我们只需把 a 与 a'，P 与 P'，b 与 b' 等等同化。但是我们也能通过构成一个默比乌斯带来把这纤维丛用不同的方法重新安装起来。把 a 与 b'，P 与 P'，b 与 a' 等等同化。这就给了这条带一个扭曲，使它连起来后象图 2.16 那样。局部地它仍同图 2.11(b)一样。事实上，在 S^1 的任意连通开真子集("真"指的是与 S^1 不全同)上的那部分丛到图 2.14 的同样部分上有一个 1-1 连续映射.我们必须绕行一周才能看出，从整个一个丛到整个另一个丛上不存在连续的 1-1 映射。所以，默比乌斯带不是一个乘积空间，因而第二个丛是非平凡的。在近代粒子物理学中，用类似的方法来构造有非平凡结构的丛以定义所谓的"瞬子"。

默比乌斯带这一例给了我们一个教训：单单说明丛的底空间和纤维是不够的，因为可能有不止一种方法来构造丛。对纤维丛我们需要一个更好的定义，而这正是群进入的地方。S^1 上

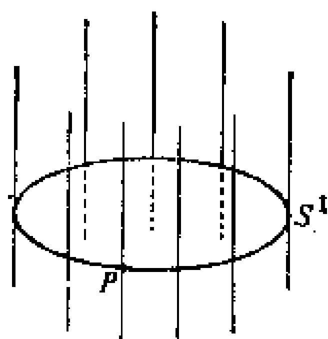


图 2.14 构造 TS^1 的平凡方法：圆 S^1 和标准纤维 R^1 (画作铅垂线)的乘积空间。比较图 2.11(b)。



图 2.15 沿一根纤维剪开 TS^1 并把它展开。纤维在铅垂方向伸展到无限远。



图 2.16 丛的默比乌斯带形式：当我们绕圆周走一圈时，纤维颠倒了一次。局部地它仍有图 2.11(b) 所示的同样结构.

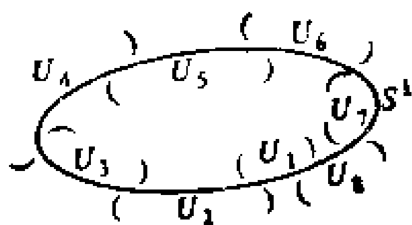


图 2.17 覆盖 S^1 的一个邻域系. 每一邻域的范围由括号所标明. U_1 与 U_2 相交，U_2 与 U_3 相交……直到 U_8 与 U_1 相交.

这两个纤维丛之间的差别在于所谓的丛的结构群. 为了更紧凑地给出纤维丛的完整定义，我们需要定义同胚，它就是从一个空间到另一个空间一个 1-1 映射，而且它与它的逆映射都是连续的[†]. (有关映射的一些术语的解释，请参看 1.2 节.) 我们定义纤维丛为一个空间 E; 它给出一个底流形 B，一个投影 $\pi: E \to B$，一根标准纤维 F，F 到其自身上的一个同胚结构群 G，以及覆盖 B 的一个开集合族 $\{U_j\}$ (即一些开集，它们的和集是 B)，所有这一些满足下列条件：

(i) 丛是局部平凡的，这指的是在任意集合 U_j 上的丛，即 $\pi^{-1}(U_j)$，有一个到乘积空间 $U_j \times F$ 上的同胚. 这一点上面已经提到了. 这个同胚的一部分是从每一根纤维，例如说 $\pi^{-1}(x)$ (这里 x 是 B 的一个元素) 到 F 上的一个同胚. 设用 $h_j(x)$ 来标记这一映射，它由确定纤维的点 x 以及包含 x 的集合 U_j 的指标 j 所共同确定.

(ii) 当两个集合 U_j 和 U_k 相交时，对交集中的一个给定点就有从它的纤维到 F 上的两个同胚 $h_j(x)$ 和 $h_k(x)$. 因为同胚是可逆的，所以映射 $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)$ 就是 F 到 F 上的一个同胚.

---

† 同胚是一种没有可微要求的微分同胚(同胚加上可微要求便是微分同胚). 对物理学上有兴趣的大部分丛而言，我们可以把"同胚"改为"微分同胚".

我们要求它是结构群中的一个元素.

第二个要求包含了与纤维丛的整体结构有关的信息. 为了看出这一点，我们首先给出 TS^1(从它很容易对任意 M 推广到 TM)的完整定义. 从 $E=TS^1$ 有底 $B=S^1$, 标准纤维 $F=R^1$ 以及投影 $\pi:(x, \bar{v})\mapsto x$, 这里 x 是 S^1 的一个点，而 $\bar{v}$ 是 T_x 中的一个向量. 设覆盖 $\{U_j\}$ 是 S^1 的任意图集中的开集合族. 图 2.17 画出了典型的一族$\{U_j\}$. 每一个 U_j 有一个坐标"系", 即 S^1 的一个参数化, 记作 λ_j. 在 U_j 中, x 点的向量 $d/d\lambda_j$ 是 T_x 的一个基. 因此 T_x 中的任意向量 $\bar{v}$, 对任意固定的 j 有表示 $\alpha_{(j)}d/d\lambda_j$, 这里 $\alpha_{(j)}$ 是一个实数. 这正是(2.4)式. 作为 TS^1 定义的一部分的 T_x 到 R 上的同胚是由 $h_j(x):\bar{v}\mapsto\alpha_{(j)}$ 定义的. 如果 x 在 U_j 和 U_k 这两个邻域中, 则从 T_x 到 R 上就有两个这样的同胚; 而且因为 λ_j 和 λ_k 是不相关的, $\alpha_{(j)}$ 和 $\alpha_{(k)}$ 就可以是两个任意非零实数. 同胚 $h_j(x)\circ h_k^{-1}(x):F\to F$ 是映射 $\alpha_{(k)}\mapsto\alpha_{(j)}$, 所以这正是用数 $r_{jk}=\alpha_{(j)}/\alpha_{(k)}$ 相乘. 因为 r_{jk} 是不等于零的任意实数, 结构群就是 $R^1-\{0\}$. 它是一个乘群，事实上是一个李群. 我们顺便提一下，对一个 n 维流形 M, TM 的结构群是行列式不为零的所有 $n\times n$ 矩阵的集合, 记作 $GL(n, R)$. 在第三章中, 我们将研究这个群.

这就定义了 TS^1. 但是它看上去象什么呢? 可以这样选择坐标 λ_j, 使任意两个坐标，例如说 λ_j 和 λ_k, 在 S^1 的 U_j 和 U_k 相交区域中同方向地增加. (我们说 S^1 是可定向的, 参见 4.7 节.) 这样选择了坐标后，就不难看出所有的"相迭数" r_{jk} 都是正的，而结构群就简化为 R^+, 即用正实数相乘. 事实上我们还能做得更好一些: 在每一个相交区域中使坐标标度满足 $d\lambda_j/d\lambda_k=1$. 于是结构群就简化为 1, 即单位元素. 这一结构群是浅显的，而这一丛结构是平凡的. 这就是表示在图 2.14 中的丛.

为了表示出默比乌斯带的结构，我们必须使用不同的映射 $h_j(x)$，而且我们必须小心地去做，不把丛解释成一个切丛. 最简单的做法是应用图 2.17 中所示的族 $\{U_j, j=1, \cdots, 8\}$，并定义 $r_{12}=1$，$r_{23}=1$，$\cdots$，$r_{78}=1$. 但是默比乌斯带上的扭曲迫使我们取 $r_{81}=-1$. 此时结构群由元素$\{1, -1\}$构成，并以乘法为群运算. 我们也能选取另外的 r_{jk}，但是我们不能找到更小的结构群了.

切丛 TS^1 有结构群 $R^1-\{0\}$，它与丛的标准纤维几乎一样. 任意流形 M 的标架丛与 TM 具有同样的结构群，但是它的纤维是切空间(等价地是 R^n)中所有基的集合. 对一维流形，如 S^1 的情况中，这是所有非零向量的集合，它与 $R^1-\{0\}$ 是一致的. 因此 S^1 的标架丛具有与其结构群同胚的纤维，这对所有标架丛都是对的. 这样的丛称为主纤维丛.

2.12 向量场和积分曲线

我们在 2.7 节中定义了向量场，它是一个法则：在 M 的每一点给出一个向量. 每一点有它自己的切空间，因此一个向量场也就在每一个切空间中选定一个向量. 既然每一根曲线在每一点都有一个切向量，所以就产生了下述命题是否正确的问题：给定一个任意向量场，是否有可能从某一点 P 开始作出一根曲线，使该曲线上任意一点处的切向量就是此向量场在这一点的向量. 回答是，对于 C^1 向量场，这是可以的. 我们把这种曲线称为该向量场的积分曲线. 证明如下：设向量场的分量是 $V^i(P)$，它是 P 的函数. 在某一坐标系 $\{x^i\}$ 中，有 $V^i(P)=v^i(x^j)$. 它是参数为 λ 的曲线的切向量，指的是

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}=v^i(x^j). \tag{2.5}$$

这正是 $x^i(\lambda)$ 的一个一阶常微分方程组，它在初始点 P 的某个邻域中总存在一个唯一的解(在大多数微分方程的教科书中都证明了常微分方程的存在性和唯一性定理. 在参考文献列出的 Choquet-Bruhat, Dewitt-Morette & Dillard-Bleick(1977) 中可以找到.)图 2.18 给出了两种特别的向量场.

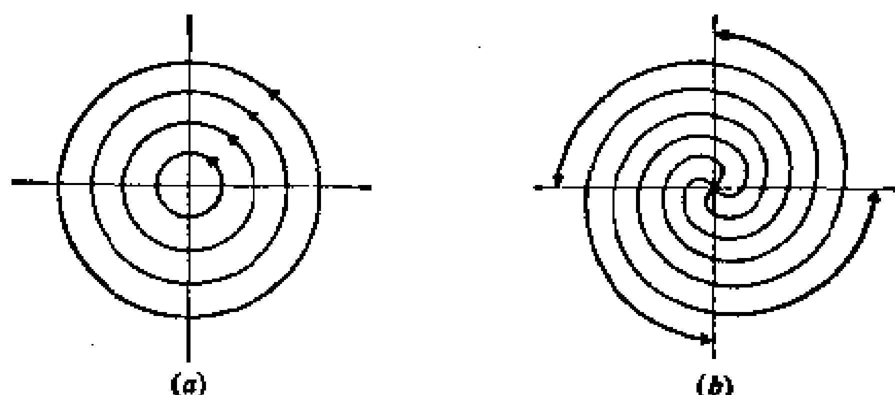


图 2.18　R^2 上两个向量场的积分曲线.
(a) $\vec{V}=x\partial/\partial y-y\partial/\partial x$; (b) $\vec{V}=(x+y/r)\partial/\partial y-(y-x/r)\partial/\partial x$, 而 $r=(x^2+y^2)^{1/2}$.

注意除了 $V^i=0$(对所有的 i)的点，不同积分曲线的路径是不会相交的. 这是因为(2.5)式的解是唯一的. 由于在每一点 P 总有某一积分曲线通过(可以在 P 点的初始条件下通过解(2.5)式而求得)，因此积分曲线"遍布"M. 例如，若 M 是三维的，则对 M 上的每一个向量场，都存在一个积分曲线的二维族，而且这些曲线覆盖了整个 M(除了对所有 i, $V^i=0$ 的可能孤立点外). 这种遍布流形的曲线集合称为一个"线汇". 顺便提一下，通常把曲线的这一集合看成是流形本身.

2.13 算子 d/dλ 的指数

现在，我们引入一个在今后的许多计算中有用的概念. 假定我们有一个解析流形(C^ω)，同时假定沿 $\bar{Y}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 的积分曲线

上点的坐标值 $x^i(\lambda)$ 是 λ 的解析函数. 于是，参数为 λ_0 和 $\lambda_0+\epsilon$ 的两个点的坐标由下列泰勒级数所联系:

$$
\begin{aligned}
x^i(\lambda_0+\epsilon) &= x^i(\lambda_0)+\epsilon\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda_0}+\frac{1}{2!}\epsilon^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}\right)_{\lambda_0}+\cdots \\
&= \left(1+\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}+\cdots\right)x^i\Big|_{\lambda_0} \\
&= \exp\left[\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]x^i\Big|_{\lambda_0},
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

这里，符号"exp"是微分算子的一个明显和方便的缩记形式，当这个微分算子作用于 $x^i(\lambda)$ 且在 λ_0 处取值的话，就给出上述泰勒级数. 它称为算子 $\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 的指数. 因为 $\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 是沿该积分曲线的一个无限小"运动"，所以它的指数就给出一个有限运动. 我们还将使用以下一些符号:

$$\exp(\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)=\mathrm{e}^{\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}=\mathrm{e}^{\epsilon\overline{V}}.$$

2.14 李括号和非坐标基

给定一个坐标系 x^i，那么用 $\{\partial/\partial x^i\}$ 作为向量场的基常常是方便的. 然而，向量场的任意线性无关集合都可以用来作基，而且我们容易证明并非所有的基都可由坐标系得出. 这是因为对所有的 i 和 j，算子 $\partial/\partial x^i$ 与 $\partial/\partial x^j$ 可换. 但是两个任意向量场却不一定可换，如 $\overline{V}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 和 $\overline{W}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} &= \sum_{i,j}V^i\frac{\partial}{\partial x^i}W^j\frac{\partial}{\partial x^j}-W^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i,j}V^iW^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&\quad +\sum_{i,j}V^i\frac{\partial W^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_{i,j}W^j\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i,j}\left(V^i\frac{\partial W^j}{\partial x^i}-W^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

上式中的最后一个等式是这样得到的，在第二个等式后面的项中把求和指标重新编号．所以，换位子

$$\left[\frac{d}{d\lambda},\ \frac{d}{d\mu}\right]=\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu}-\frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda} \tag{2.8}$$

是一个**向量场**，而它的分量一般不为零．如果 $d/d\lambda$ 和 $d/d\mu$ 是一个基中的两个元素，则它们就不能表示为任意坐标的求导．这样的基就是一个非坐标基．

搞清这一点是重要的：坐标基与非坐标基之间的差别只能在流形的某一区域中存在，一个单独点上是没有这种区别的．这种差别取决于向量分量的**导数**，而不是它们在某一点的值．所以坐标基与非坐标基的不同性质只有在流形的区域中才要紧，而在那些只涉及一点 P 的切空间 T_P 的问题中是无关紧要的．

习 题 2.1

定义欧氏平面中极坐标的"单位"基向量场为

$$\hat{\mathbf{r}}=\cos\theta\hat{\mathbf{x}}+\sin\theta\hat{\mathbf{y}},$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=-\sin\theta\hat{\mathbf{x}}+\cos\theta\hat{\mathbf{y}},$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}=\partial/\partial x$, $\hat{\mathbf{y}}=\partial/\partial y$．证明它们是非坐标基．

换位子 $[d/d\lambda,\ d/d\mu]$ 称为 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 的**李括号**†，我们现在来考察它的几何解释．在图 2.19 中的二维流形上，我们画了一个坐标网．注意根据定义，在 x^2 曲线上（它们是 $\partial/\partial x^2$ 的积分曲线），x^1 取常值．这就是 $\partial/\partial x^1$ 与 $\partial/\partial x^2$ 可换的原因：其中任意一个都是沿着另一个取定值的曲线上的求导．现考虑两个任意

† 李括号中的"李"与李群中的"李"，是同一个李，即 Sophus Lie．他是十九世纪后叶的大数学家．我们将看到李括号是李导数的一个特殊情况．熟悉李群的读者可以看出，李括号是向量场 $d/d\lambda$ 和 $d/d\mu$ 的交换子．$d/d\lambda$ 和 $d/d\mu$ 生成映射的一个李群，这些映射我们将在第三章中讨论．

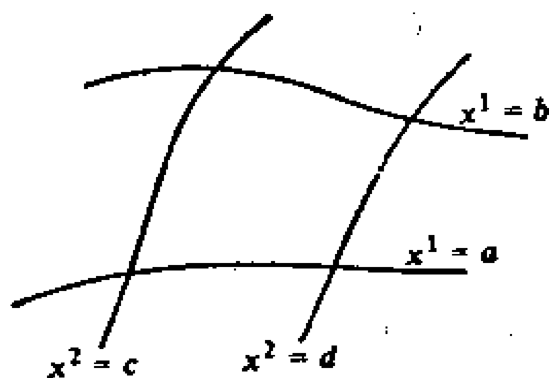


图 2.19 二维流形上的典型坐标网。

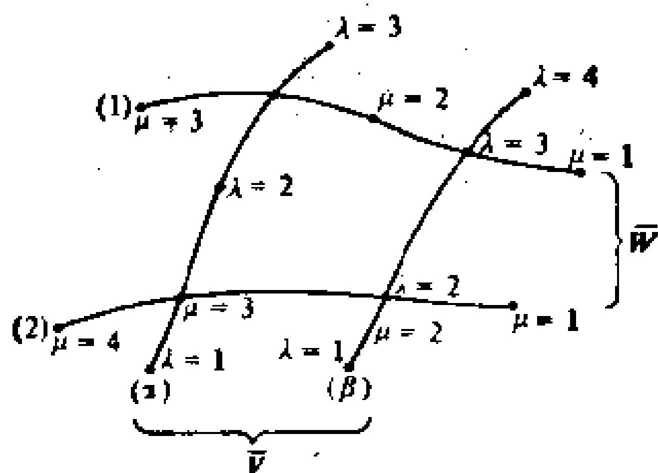


图 2.20 二维流形上两个向量场的典型积分曲线。

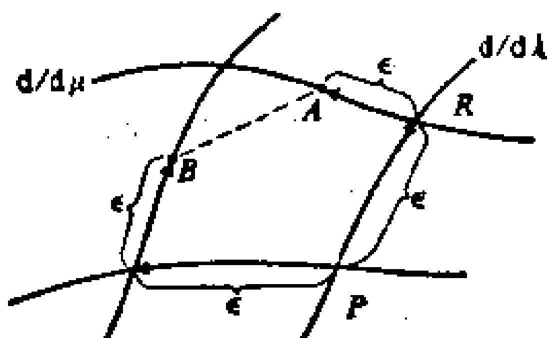


图 2.21 在几何上可把李括号$[\overline{V}, \overline{W}]$解释为一个不完整平行四边形的开部，这个四边形的另外的边是沿着$\overline{V}$和$\overline{W}$的积分曲线的等参数增量。

的向量场，$\bar{V}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 和 $\bar{W}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$，它们的积分曲线如图2.20所示. $\bar{W}$ 的积分曲线不必是 λ 取常值的曲线，反之亦然. 求导 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 不是一个使 λ 不变的求导，所以 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 不是可换的. 虽然 $\bar{V}$ 曲线和 $\bar{W}$ 曲线看来象坐标曲线，但是它们的参数化并不是一个坐标系的参数化. 尽管在二维人为的情况中，它们看起来象坐标曲线，但在三维情况中，可能会发生曲线(1)与曲线(α)和(β)相交，但曲线(2)只与(α)相交的情况.

用下列方法我们可以得到向量 $[\bar{V}, \bar{W}]$ 的一个图形. 在图2.21中，由 P 点出发，沿过 P 的 $\bar{V}$ 曲线移动 $\Delta\lambda=\epsilon$，然后再沿 $\bar{W}$ 曲线移动 $\Delta\mu=\epsilon$. 最后到达 A. 另一次从 P 点出发，先移动 $\Delta\mu=\epsilon$，然后移动 $\Delta\lambda=\epsilon$，最后到达 $B(B\neq A)$. 我们将证明：取 ϵ 的最低幂，从 A 到 B 的向量正是 $\epsilon^2[\bar{V}, \bar{W}]$.

应用前面引入的指数算子是十分方便的，显然有

$$x^i(R)=\exp\left[\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]x^i\Big|_P,$$

和

$$x^i(A)=\exp\left[\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right]\exp\left[\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]x^i\Big|_P. \tag{2.9}$$

类似地，从 P 到 B 点的路径给出

$$x^i(B)=\exp\left[\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]\exp\left[\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right]x^i\Big|_P. \tag{2.10}$$

于是 A 和 B 的坐标差为

$$x^i(B)-x^i(A)=[\mathrm{e}^{\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}, \mathrm{e}^{\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu}]x^i|_P, \tag{2.11}$$

这正是指数算子的换位子的分量. 回到泰勒级数，我们有

$$\begin{aligned}[\mathrm{e}^{\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}, \mathrm{e}^{\epsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu}]=&\Big[1+\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}+O(\epsilon^3),\\ &\quad 1+\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}+\frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}+O(\epsilon^3)\Big]\\ =&\epsilon^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right]+O(\epsilon^3),\end{aligned}$$

$$x^i(B)-x^i(A)=\{\epsilon^2[\overline{V},\ \overline{W}]+O(\epsilon^3)\}x^i_1|_P, \qquad (2.12)$$

这正是李括号的第 i 个分量. (2.12)式表明我们给出的李括号图形是正确的.

习 题 2.2

(a) 利用(2.6)式来证明(2.12)式.

(b) 试证,对所有的 a 和 b,

$$\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda+b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]=\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]\exp[b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] \qquad (2.13)$$

成立的充要条件是 $[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda,\ \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]=0$.

习 题 2.3

证明任意三个二阶可微(即 C^2)向量场 $\overline{X}, \overline{Y}$ 和 $\overline{Z}$ 满足雅可比恒等式:

$$[[\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}]+[[\overline{Y},\overline{Z}],\overline{X}]+[[\overline{Z},\overline{X}],\overline{Y}]=0. \qquad (2.14)$$

M 的一个区域 U 上向量场的一个**李代数**指的是 U 上向量场的一个集合 A, 它在加法下是一个向量空间(即 A 中场的常系数的任意线性组合仍在 A 中), 且在李括号运算下封闭(即 A 中任意两个场的李括号是 A 中的另一个场). 显然, U 上的 C^∞ 向量场的全体是一个李代数. 但是, 以某种原因挑选出来的一个向量场的较小集合,如果也构成一个李代数的话,那就更有意思了. 这些挑出来的向量场与流形的一些不变性质密切相关,并与和它们相伴的不变群(通常是李群)密切相关. 我们在第三章中将详细研究这些问题,在那里我们还将更一般地定义李代数.

*2.15 什么条件下一个基是坐标基

设在二维流形 M 上给定两个向量场 $\overline{A}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 和 $\overline{B}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, 且设 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 在 M 的某一开邻域 U 中的每一点是线性无关的,因此它们构成那里的向量场的一个基. 在什么条件下,它们

才是一个坐标基呢？换言之，在什么条件下，λ 和 μ 是 U 的坐标呢？显然，必要条件是它们可换，即

$$[\bar{A},\ \bar{B}]=0.$$

我们将证明这一条件也是充分的．为此我们直接回到流形的基本定义上去，构造 U 到 R^2 中一个邻域上的一个1-1映射．从 U 中的某一点 P 开始，应用 U 中的任意坐标$(x^1,\ x^2)$，我们从 P 沿着 $\bar{A}$ 移动一个参数距离 λ_1，到达点 R，其坐标（根据(2.6)式）是

$$x^i(R)=e^{\lambda_1 d/d\lambda}x^i\big|_P.$$

如果我们先沿着 $\bar{A}$ 移动一个距离 λ_1，然后沿 $\bar{B}$ 移动一个距离 μ_1，我们到达点 Q，则其坐标为

$$x^i(Q)=e^{\mu_1 d/d\mu}e^{\lambda_1 d/d\lambda}x^i\big|_P.$$

这个方程定义了从 R^2 的原点的某一邻域 V 到 U 中的一个指数（型）映射：V 的一个给定元素，即偶$(\lambda_1,\ \mu_1)$，映为点 Q．这一映射表示于图2.22中．为了使这个映射能定义一个坐标系，它就必须是1-1的，即它一定要有逆．下面我们将证明：它确实在 U 中的每一点处都有一个逆．但是首先我们将证明，如果 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 在这一邻域中可交换，则它们是这一坐标系的坐标基向量．让我们把这一映射重新写为$\{\alpha,\ \beta\}$到$\{x^1,\ x^2\}$的坐标变换：

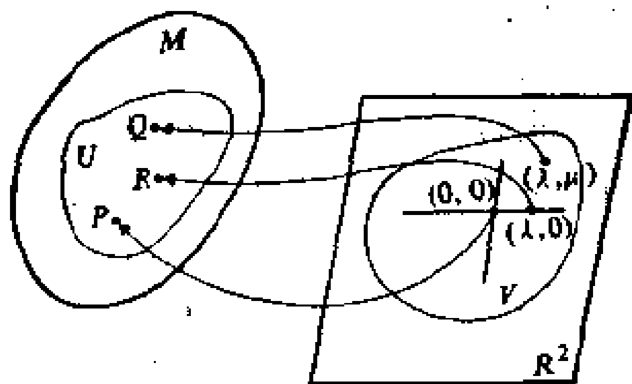


图2.22　正文中描述的从 R^2 到 M 的映射．它提供了 P 点某一邻域中的一个坐标系．

$$x^i(\alpha,\ \beta)=e^{\beta d/d\mu}e^{\alpha d/d\lambda}x^i\big|_P.$$

基向量 $\partial/\partial\alpha$ 和 $\partial/\partial\beta$（在 $\{x^i\}$ 坐标系中）分别有分量 $\partial x^i/\partial\alpha$ 和 $\partial x^i/\partial\beta$．由(2.6)式容易证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda},$$

而且因为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 可交换，则有

$$\frac{\partial x^i}{\partial\alpha}=\mathrm{e}^{\beta\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu}\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_P,$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial\beta}=\mathrm{e}^{\beta\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu}\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\mu}\bigg|_P,$$

但是 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda$ 正是 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 在 $\{x^i\}$ 坐标系中的分量. 因为这是 M 的一个解析函数，把 $\exp(\beta\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu)\cdot\exp(\alpha\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)$ 作用在它上，单单就给出它在坐标为(α,β)那一点的值. 所以在 U 中的每一点处，我们都有

$$\partial/\partial\alpha=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda,\ \partial/\partial\beta=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu.$$

这样我们就证明了：$[\overline{A},\ \overline{B}]=0$ 是 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 为坐标基向量的充分条件.

我们现在再回过来证明 $\{\alpha,\ \beta\}$ 确实构成 U 中的一个坐标系. 我们必须证明映射 $\{\alpha,\ \beta\}\rightarrow\{x^i\}$ 有逆. 为此，我们应用反函数定理(参见 1.2 节). 这个定理说，若矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\alpha}\\[2ex] \dfrac{\partial x^1}{\partial\beta} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\beta}\end{pmatrix}$$

在某一点 $\{\alpha,\ \beta\}$ 有不为零的行列式，则此映射在该点的某一邻域中有一个逆. 当且仅当向量 $\partial x^i/\partial\alpha$, $\partial x^i/\partial\beta$ 是线性无关时，此行列式才不为零. 但是从上面的讨论显然可知，由于 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 在 U 中是线性无关的，这就不会发生行列式为零的情况. 所以此映射在 U 中处处都是可逆的，因而提供了一个坐标系.

如果 $[\overline{A},\ \overline{B}]\neq0$, 那么上述论证在哪里失效呢? 这是一个有兴趣的问题. 在这种情况中，$\partial x^i/\partial\beta$ 的表达式十分复杂，至

少在 $\alpha=\beta=0$ 的某一邻域中，该映射仍有一个逆，这一点仍是正确的．但是，由于在问题中的那一点上 $\partial x^i/\partial\beta$ 不再恰好等于 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\mu$，所以向量 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 就不再是所构造的坐标的基向量了．

上述的整个讨论可以推广到 n 维空间中去：如果 n 维流形 M 上的 n 个向量 $\{\overline{Y}_{(j)},\ j=1,\ \cdots,\ n\}$ 是线性无关的，且在 M 的某一个开邻域 U 中它们彼此可换，则它们是某坐标系 $\{\alpha_j\}$ 的坐标基向量，$\{\alpha_j\}$ 与坐标系 $\{x^i\}$ 之间的关系是

$$x^i(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)=\exp\left[\sum_j \alpha_j\,\overline{Y}_{(j)}\right]x_i\Big|_P,$$

这里 $\{x^i\}$ 是 U 中任意点 P 周围的任意坐标系．

2.16 一次形式

让我们回到 P 点所有切向量的空间 T_P 上去．作为构造张量的第一步，我们定义一次形式为向量的线性实值函数．它的含义如下：P 点的一个一次形式 $\tilde{\omega}$，使 P 点的一个向量 $\overline{V}$ 对应一个实数．这个实数记作 $\tilde{\omega}(\overline{V})$．这一符号表示了 $\tilde{\omega}$ 是向量上的一个函数．（正象字母上加了"—"号表示向量一样，字母上加了"～"号表示一次形式．）这一函数的线性性是指

$$\tilde{\omega}(a\overline{V}+b\overline{W})=a\tilde{\omega}(\overline{V})+b\tilde{\omega}(\overline{W}),\qquad(2.15)$$

这里 a 和 b 都是实数．我们可以用下述直截了当的方法来定义一次形式的加法和它们与实数的乘法：$a\tilde{\omega}$ 是一个一次形式，它对所有 $\overline{V}$ 满足

$$(a\tilde{\omega})(\overline{V})=a[\tilde{\omega}(\overline{V})],\qquad(2.16\text{a})$$

$\tilde{\omega}+\tilde{\sigma}$ 也是一个一次形式，它对所有 $\overline{V}$ 满足

$$(\tilde{\omega}+\tilde{\sigma})(\overline{V})=\tilde{\omega}(\overline{V})+\tilde{\sigma}(\overline{V}),\qquad(2.16\text{b})$$

因此点 P 处的所有一次形式满足向量空间的公理．这个向量空间称为 T_P 的对偶空间，记作 T_P^*．这里用"对偶"这个词的原因，

是因为通过下列方法也可把向量看成是一次形式的线性实值函数. 给定向量 $\bar{V}$, 它在任何一次形式 $\tilde{\omega}$ 上的值定义为 $\tilde{\omega}(\bar{V})$. 这一作用是线性的, 因为由(2.16)式它在 $a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma}$ 上的值为

$$
\begin{aligned}
(a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma})(\bar{V}) &= (a\tilde{\omega})(\bar{V})+(b\tilde{\sigma})(\bar{V}) \\
&= a(\bar{V}\text{ 在 }\tilde{\omega}\text{ 上的值})+b(\bar{V}\text{ 在 }\tilde{\sigma}\text{ 上的值}),
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

所以, 这一线性性就能使我们把其中一个视为函数, 而另一个取为变量, 从而给出一个实数. 因而, 我们说向量和一次形式是互为对偶的. 它们中的一个在另一个上的值常常可用以下几种方式表示:

$$
\tilde{\omega}(\bar{V}) \equiv \bar{V}\langle\tilde{\omega}\rangle \equiv \langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle,
\tag{2.18}
$$

上面的最后一个表达式着重表示了它们的平等地位. 我们经常把数 $\tilde{\omega}(\bar{V})$ 的构成称为 $\tilde{\omega}$ 与 $\bar{V}$ 的缩并. 在张量代数的较古老的处理中, 向量常常称为"逆变向量", 而一次形式称为"协变向量". 这些名称起源于它们的分量在基变换下的变换法则, 对此我们在 2.26 节中再加以讨论.

2.17 一次形式的例子

在进一步展开数学讨论之前, 我们先来考察一次形式的一些熟悉的例子. 最熟悉的一次形式之一是函数的梯度, 我们将在 2.19 节中研究这一问题. 其他例子有:

(i) 在矩阵代数中, 如果我们把列向量称为"向量", 那么行向量便是一次形式. 这因为用通常的矩阵乘法规则(以正确的次序)把它们相乘, 则能给出一个实数. 例如, 在二维的情况中, 行向量 $(-1, 5)$ 可以认为是一个函数, 它与任意列向量相乘, 就给出一个实数:

$$(-1,\ 5):\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (-1,\ 5)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x+5y.$$

这个函数的线性性是容易核实的.

(ii) 在量子力学的希尔伯特空间中,类似于例(i),我们有狄拉克刃矢 $|\psi\rangle$(向量)和刃矢 $\langle\phi|$(一次形式),它们的缩并是一个复数 $\langle\phi|\psi\rangle$. [把实数上的向量和张量代数推广成复数上的代数这是浅显的:我们只要把"实"字换成"复"字即可. 把实流形推广成复解析流形(其中映射是到空间 $(z^1, z^2, \cdots, z^n)$ 的解析映射,z^i 不是实数,而是复数)在许多方面也是简单的. 但是复流形的某些特性,如它们的整体结构和曲率,会造成一些特殊的问题,我们在本书中不处理这些专题.] 符号 $\langle\phi|\psi\rangle$ 类似于(2.18)式,这并不是偶然的.

在例(i)和例(ii)中,人们习惯在向量与一次形式之间变来变去,对一个给定的向量,用它的"共轭"或"转置"与之对应,这样就有了一个一次形式. 在 2.29 节中,我们将看到这等价于给出向量空间的一个度规或内积. 这是向量空间的一个非常重要的附加结构. 但是读者应该记住:不存在一种先验的"自然"方式,使我们能把一个特定的一次形式与一个特定的向量联系起来.

*2.18 狄拉克 δ 函数

在量子力学中,常常要讨论函数空间. 考察定义在 R^1 的区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上的所有 C^∞ 实值函数的集合 $C[-1,\ 1]$. 在加法下,这一集合是一个群(任意两个 C^∞ 函数的和仍是 C^∞,等等),再加上与实数的相乘(若 f 是 C^∞ 函数,则 cf 也是 C^∞ 函数,这里 c 是任意常数),它就是一个向量空间了. 它的一次形式所构成的对偶空间称为分布. 狄拉克 $\delta(x)$ "函数" 是分布的一个例

子，它被定义为在 C^∞ 函数 $f(x)$ 上的值为 $f(0)$ 的一次形式：

$$\langle\delta(x),\ f(x)\rangle=f(0). \tag{2.19}$$

在某种意义下 $\delta(x)$ 是一个真函数：它是 $C[-1,\ 1]\to R$ 的映射．习惯上，分布这一词仅用于这种连续函数，但是任何连续的概念都需要有一个拓扑．在现在的情况下，$C[-1,\ 1]$ 应有一个拓扑结构．$C[-1,\ 1]$ 是一个无限维向量空间（其中有无限多个线性无关的 C^∞ 函数），而讨论其拓扑结构就超出本书的范围了．有兴趣的读者可以参看 Choquet-Bruhat *et al.* (1977)．现在对我们来说重要的是要知道：上述意义下的函数并不是狄拉克以及与他同时代的人当初把 $\delta(x)$ 称为 δ 函数时所想到的那层意思．为了看出他们当时的想法，我们就必须再来看一下把 $[-1,\ 1]$ 中的一个函数变换成 $C[-1,\ 1]$ 上的一个一次形式的方法．

对于 $C[-1,\ 1]$ 中的任意函数 g，可以如下地定义一个一次形式 $\tilde{g}$，它在 $C[-1,\ 1]$ 中函数 f 上的值为

$$\langle\tilde{g},\ f\rangle=\int_{-1}^{1}g(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

这确实是一个线性函数，它把 f 映为上述积分值（因为 g 和 f 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时连续，所以他们在这其中有界，因此积分总存在）．以前用的"δ 函数"这一名词就是把这个关系式在放宽的条件下改变一下：若 $\delta(x)$ 是一个一次形式，则我们应该能够在通常意义下说它是 x 的一个函数，它与 $f(x)$ 相乘的积分给出 $f(0)$：

$$\int_{-1}^{1}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

这一概念当时引起了数学家们的极大困惑．其中有人甚至声称，尽管狄拉克总能得到一致和有用的结果，但狄拉克是错的．物理学家们却相当明智，他们不顾这些极端的批评，仍沿着他们的直觉前进．现在我们可以看清，为什么他们虽是"错"的，但又能

取得成功．当他们把 $\delta(x)$ 看成是 $R^1 \to R^1$ 的一个函数时，他们是"错"的，这样做不会有什么精确的意义．而且他们把它作为一个函数来处理，对它积分以至于微分：

$$\int_{-1}^{1} \delta'(x) f(x) \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} \delta(x) f'(x) \mathrm{d}x = -f'(0),$$

这都是"错"的．但是他们又是"对"的：他们从不把 $\delta(x)$ 与足够可微的函数 $f(x)$ 一起在积分号外使用．他们只把 δ 函数用在把函数映为实数的哪些场合中．在这一意义上，他们利用了分布理论的方法，但没有使用为了使 δ 函数有一个坚实的基础而特别想出来的一套分布理论的语言．然而，请注意：分布理论比物理学家较陈旧的观点有一个极大的简化，即分布理论可以不必借助于任意象(2.20)式那种把函数转变成一次形式的法则来定义 δ 函数．正如我们在上述的例(ii)中所看到的，这种法则是向量空间上的一种附加结构．现在，我们可以看出为了理解 δ 函数，这个附加结构并不是必须的．

应该顺便提一下，为了与定义任意向量空间中的对偶的通常习惯做法相一致，我们把"分布"这一词仅用于连续一次形式．然而，在 2.16 节中定义一次形式时，我们并没有用到"连续"这两字．我们是否前后不一致了？回答是：我们前后是一致的．这是因为在有限维向量空间上的线性函数总是连续的．(参见第一章参考文献中的 Choquet-Bruhat *et al.* (1977) 或 Rudin (1964).)

2.19 梯度及一次形式的图形表示

类似于向量场，一个一次形式场也是一个法则，它在每一点给出一个一次形式．(2.16)式中的一些法则可推广到场．在这种情况下，a 是 M 上的一个函数，不必是常值的．一次形式的

可微性可以用向量场和函数的可微性来定义. 例如, 在一个 C^∞ 流形上, 给定一个一次形式 $\tilde{\omega}$, 当提供一个向量场 $\bar{V}$ 时, $\tilde{\omega}$ 就定义了一个函数 $\tilde{\omega}(\bar{V})$. 如果这一函数对任意 C^∞ 的 $\bar{V}$ 都是 C^∞ 的, 则 $\tilde{\omega}$ 是 C^∞ 的. (在 2.20 节中, 当定义了一次形式的分量后, 我们将给出一个可微性的更容易的定义.) 象对向量场那样, 有一个称为余切丛的纤维丛 T^*M, M 为底空间, T^*_P 为 P 点的纤维. T^*M 的截面是一次形式场.

最有用的和最有启发的一次形式场是函数 f 的梯度, 记作 $\tilde{\mathrm{d}}f$. 虽然在向量分析的初等处理中, 人们把梯度称为向量, 但严格地说它是一个一次形式. 因此, 梯度 $\tilde{\mathrm{d}}f$ (不是"无穷小" $\mathrm{d}f$, 我们很少用 $\mathrm{d}f$)[†] 可定义为

$$\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda, \tag{2.21}$$

这里 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 是一任意切向量. 也就是说, f 在任意点 P 的梯度是 T^*_P 中的一个元素, 它在 T_P 中元素 $\bar{V}$ 上的值是 f 沿着切线为 $\bar{V}$ 的曲线的方向导数. 我们必须核实一下, 它是 T_P 上的一个在 (2.15) 式意义下的线性函数:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}f\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right)&=\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right)f\\&=a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mu}\\&=a\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)+b\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu).\end{aligned}$$

因此它确实是线性的. 初看起来, 可能会认为 f 本身应该是一次形式, 因为 f 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 给出数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. 但是这是不对的, 读者应该记得 T_P 和 T^*_P 都在 P 点定义. 因此构造 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ 所需的所有信息都必须包括在其中. f 在 P 点的值与 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ 是无关的. 为了计算 P 点的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$, 我们必须知道 $\partial f/\partial x^i$ 在 P 点的值. 正

---

† 在 Spivak(1970), vol. 1 中有 $\tilde{\mathrm{d}}f$ 与无穷小之间关系的优美讨论.

如我们将看到的，这些是 f 的梯度的分量．因此它是梯度，而梯度是一次形式．

梯度使我们能给出一次形式的一个图形，这是把向量画成箭形图形的一个补充．在图 2.23 中，画出了标出等高线的部分地形图．如果 h 是高度，则梯度 $\tilde{d}h$ 在象 A 那样的区域中显然最大，在那里等高线最为密集；而在 B 附近，等高线分得较开，因此 $\tilde{d}h$ 最小．而且假定我们想知道在两点间的一次(短的)散步会有多少高度差的话，我们可以在地形图的这两点之间画一线段(向量 $\Delta\bar{x}$)．于是与这一线段相交的等高线的数目就给出高度差．例如，线段 1 与 $1\frac{1}{2}$ 根等高线相交，而线段 2 与 2 根等高线相交．线段 3 虽然与线段 2 出发点相同，但方向不同，它只走了 $\frac{1}{2}$ 个等高线所表示的高度．这些数字就是 Δh，它是 $\tilde{d}h$ 和 $\Delta\bar{x}$ 的线性函数：

$$\Delta h = \sum \frac{\partial h}{\partial x^i} \Delta x^i.$$

这是 $\tilde{d}h$ 在 $\Delta\bar{x}$ 上的值(参见上面的(2.21)式和下面的(2.27)式)．所以，一次形式可以用一系列面(图 2.24)来表示，而它与向量 $\bar{V}$ 的缩并是与 $\bar{V}$ 相交的面的数目．这些面越密集，$\tilde{\omega}$ 就越大．

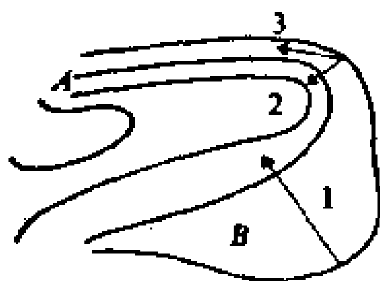


图 2.23　丘陵地区的一个地形图．图中曲线是海拔等高线，箭头表示散步者可能走的小径．



图 2.24　用比流形的维数低一维的一系列面来表示一个“切”一次形式 $\tilde{\omega}$．向量 $\bar{V}$ 穿过面的数目就是缩并 $\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle$．

正如向量是直的，严格地说，一次形式的面也是平直的和平行的．这是因为我们讨论在一点处的一次形式，而不是在一个扩展区域中的一次形式，与切向量同样意义，是“切”一次形式．

这些图形表明为什么我们一般不能把梯度称为向量．有人会希望把“指向”斜坡的向量（它的指向使得每单位长度能穿过尽可能多的等高线）被确认为有向量（性质的）梯度．这里关键性的词是“每单位长度”．如果在流形中有一个距离的量度的话，那么向量和梯度是可以对应起来的．但是如果我们不知道如何比较沿不同方向的向量的长度的话，我们就不能定义一个有最大陡度的方向，那梯度也就根本不同于向量．因为我们一般不假定有一个长度（“度规”），因此我们也就必须维持向量与一次形式之间的区别．在 2.29 节中，我们再回过来讨论这一点．

2.20 基一次形式和一次形式的分量

在 P 点的一次形式的向量空间 T_P^* 中，任意 n 个线性无关的一次形式构成了一个基．然而，一旦在 P 点对向量空间 T_P 选定一个基 $\{\bar{e}_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 后，则它就在 T_P^* 中诱导了一个称为对偶基的特殊的基 $\{\tilde{\omega}^i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$．对偶基的定义是，如果 $\bar{V}$ 是 T_P 中的任意向量，则 $\tilde{\omega}^i$ 定义为

$$\tilde{\omega}^i(\bar{V})=V^i, \qquad (2.22)$$

即 $\tilde{\omega}^i$ 与 $\bar{V}$ 的缩并给出 $\bar{V}$ 的第 i 个分量．容易看出(2.22)式对变量 $\bar{V}$ 是线性的，这是因为，例如说，$\bar{V}+\bar{W}$ 的第 i 个分量是 V^i+W^i．因此 (2.22) 式实际上定义了 T_P 上的一个线性函数．特别地，因为基向量 $\bar{e}_j$ 只有第 j 这个分量，而所有其他的分量为零，因此有

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_j)=\delta^i_j. \qquad (2.23)$$

大多数参考文献中都是这样定义 $\tilde{\omega}^i$ 的．应该十分注意：为了确

定任意 $\tilde{\omega}^i$，则所有的向量 $\{\bar{e}_j\}$ 都必须是已知的．其中任意一个 $\bar{e}_k$ 如有改变的话，则基一次形式 $\tilde{\omega}^i$ 中的所有元素都会改变．我们建立的是一个基与其对偶基之间的对应，而不是单个向量与其相伴一次形式之间的对应．

我们还未明确证明 $\{\tilde{\omega}^i\}$ 是线性无关的，因此它们的确构成一个基．这从(2.23)式是容易得到的，但是我们将采用一个较为间接的做法．考察作用在任意向量 $\bar{V}$ 上的任意一次形式 $\tilde{q}$，有

$$\tilde{q}(\bar{V})=\tilde{q}\left(\sum_j V^j\bar{e}_j\right)=\sum_j V^j\tilde{q}(\bar{e}_j)=\sum_j \tilde{\omega}^j(\bar{V})\tilde{q}(\bar{e}_j). \tag{2.24}$$

数

$$q_j=\tilde{q}(\bar{e}_j) \tag{2.25}$$

称为 $\tilde{q}$ 在对偶于 $\{\bar{e}_j\}$ 的基上的分量．为了看出这一词还不至于仅仅类似于(2.22)式，我们把(2.24)式写为

$$\tilde{q}(\bar{V})=\sum_j q_j\tilde{\omega}^j(\bar{V}).$$

因为一次形式是用它在向量上的值来定义的，由此式、(2.16)式以及 $\bar{V}$ 是任意的这一事实，能得到

$$\tilde{q}=\sum_j q_j\tilde{\omega}^j. \tag{2.26}$$

这表明集合 $\{\tilde{\omega}^j\}$ 确实是一个基，因为它们一共有 n 个元素，而任意 $\tilde{q}$ 是它们的一个线性组合．同时(2.26)式也表明了数 $\{q_j\}$ 确实是 $\tilde{q}$ 在这个基中(在通常意义下的)的分量．

最重要的是，现在有了一个公式，只要我们已知 $\tilde{q}$ 和 $\bar{V}$ 的分量，就能求得 $\tilde{q}(\bar{V})$ 的值：

$$\tilde{q}(\bar{V})=\sum_j q_jV^j. \tag{2.27}$$

正如前面提到过的，这是 $\bar{V}$ 和 $\tilde{q}$ 的缩并．

所有这些情况都能自然地直接推广到一次形式场．若向量场的集合 $\{\bar{e}_i\}$ 在 M 的某一区域 U 中的每一点上都是一个基，则

由(2.23)式定义的场 $\{\tilde{\omega}^j\}$ 在 U 的所有点上也是一个基. U 上的坐标系 $\{x^j\}$ 定义了向量场的一个自然基$\{\partial/\partial x^j\}$，它也定义了 n 个一次形式的一个自然集合：梯度 $\{\tilde{d}x^j\}$. 这些一次形式事实上是与坐标基向量对偶的基，这可由(2.21)式得到

$$\tilde{d}x^i(\partial/\partial x^j)=\partial x^i/\partial x^j=\delta^i_j, \qquad (2.28)$$

这果第二个等式是从偏导的通常性质得出的.

在 2.19 节中，我们定义了一次形式场的可微性. 现在容易证明：当且仅当一次形式 $\tilde{q}$ 的与向量场的 C^∞ 基相关联的分量 $\{q^i\}$ 是 C^∞ 函数时，$\tilde{q}$ 才是 C^∞ 一次形式.

2.21 指标的符号法

对于指标的应用，我们采取下述规定. 我们用上标表示向量的分量，如 V^i. 而用下标表示一次形式的分量，如 ω_j. 向量基的元素用下标表示($\bar{e}_j$)，而一次形式基的元素用上标表示($\tilde{\omega}^j$). (对于坐标基，这条规定意味着，一次形式 $\tilde{d}x^i$ 有上标，这是应该的. 而对向量 $\partial/\partial x^j$，由于指标是分母中的一个上标，故仍认为是下标.)采用这些规定是很有道理的，考察缩并

$$\tilde{\omega}(\bar{V})=\sum_j V^j\omega_j,$$

它是乘积的一个和式. 在每一个乘积中，一个因子具有上标，而另一个因子具有下标. 我们将采用**爱因斯坦求和规定**：每当一个表达式中有一对**重复**的指标，一个是上指标，另一个是下指标时，我们就约定对这个指标求和. 因此，在下述表达式中：

$$\tilde{\omega}=\omega_j\tilde{d}x^j,\quad \bar{V}=V^j\frac{\partial}{\partial x^j},\quad \tilde{\omega}(\bar{V})=V^j\omega_j,$$

我们认为都是有求和的. 而在下列表达式

$$V^jW^k,\ V^j\omega_i,\ V^jW^j$$

中，则不求和. 其中前面两个没有重复指标，而在最后一个中，

两个指标都是上标. 应用求和规定会大大简化应用分量进行的计算,而我们对指标上下位置的规定,将使得在应用求和规定时粗心的错误尽可能的少.

我们现在可以把对向量代数的论述推广到张量上去了.

2.22 张量和张量场

从我们已经发展的一些概念自然扩展出去便得到了张量. 它们的代数是简单的, 但正如我们将要看到的, 它们很有用处. 读者初次遇到张量时会产生的主要困难是,他们不能把张量"具体化",它们没有表示的图形. 早先我们发展了表示向量和一次形式的图形方法,在某种程度上,这种方法可以推广到更高阶的张量上去, 但是此时图形将变得很复杂. 所以避免直接画出大部分的张量,而把它们用我们将给出的定义,作为作用在向量和一次形式上的线性算子去对待,这也许是更为妥当的.

考察 M 中的点 P. P 点的一个$\binom{N}{N'}$型张量定义为一个线性函数,它以 N 个一次形式和 N' 个向量作为变量,而函数值为实数. 这是推广了我们对一次形式的定义. 这里"线性"指的是对每一个变量的线性(通常称为多重线性). 作为例子, 如果 $\mathbf{F}$ 是一个$\binom{2}{2}$张量, 那么它在一次形式 $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\sigma}$ 及向量 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 上的值是

$$\mathbf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}).$$

作为一个线性函数,对任意的数 a 和 b, 它必须满足

$$\mathbf{F}(a\tilde{\omega}+b\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W})=a\mathbf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) + b\mathbf{F}(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}), \qquad (2.29)$$

而对另外的变量也有类似的结果. 如果有时我们想不提及 $\mathbf{F}$ 的

变量而单讨论 $\mathbf{F}$ 时，我们可以用符号 $\mathbf{F}(\ ,\ ;\ ,\ )$ 来表示，其中空的位置表示可以填入适当类型的量(在分号前该填入一次形式，分号后该填入向量)的"空位"．当然，变量的次序不同一般会产生差别，就象实变量函数那样．(如对于函数 $f(x,\ y)=3x+5y$，$f(1,\ 2)$ 和 $f(2,\ 1)$ 是不同的．)

正如向量和一次形式那样，一个 $\binom{N}{N'}$ 型**张量场**指的是这样一个法则：它在每一点给出一个 $\binom{N}{N'}$ 型张量．线性性也推广到张量场，在这里(2.29)式中的数 a 和 b 在不同点可有不同的值，它们是 M 上的函数．场的可微性也如 2.19 节中对一次形式的可微性一样定义．

作为一种特殊情况，注意：向量是 $\binom{1}{0}$ 型张量，它们是一次形式的线性函数．类似地，一次形式是 $\binom{0}{1}$ 型张量．我们约定流形上的标量函数是 $\binom{0}{0}$ 型张量．(参见下面 2.28 节"函数和标量"．)一个 $\binom{1}{1}$ 型张量 $\mathbf{T}$ 需要两个变量，因此 $\mathbf{T}(\tilde{\omega};\bar{V})$ 是一个实数．对于固定的 $\tilde{\omega}$，$\mathbf{T}(\tilde{\omega};\ )$ 是一个一次形式，因为它需要填入一个向量变量才能给出一个实数．$\mathbf{T}(\ \ ;\bar{V})$ 是一个向量．因此，一个 $\binom{1}{1}$ 型张量可以认为是向量的一个线性向量值函数，而且也可以作为一次形式的一个线性形式值函数．对任意张量都可以这样认为．

2.23 张量的例子

虽然我们对张量的定义似乎是相当抽象的，但事实上在一

般问题中，它有十分直接的应用. 在本节中我们讨论三个例子，而以后在2.29节中我们将花一些时间来讨论一种非常重要的张量——度规张量.

(i) 我们先在矩阵代数中举一个例. 把列向量看成是向量而行向量看成是一次形式，则矩阵是一个$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$型张量. 因为用矩阵乘一个(列)向量，则给出一个向量，而用通常的方法对它两边进行运算，则得到一个数.

习 题 2.4

在矩阵代数中，一个线性("主动")变换(例如一个正交转动)把一个矩阵变为另一个矩阵. 当这个变换作用于矩阵上时，它是一个$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$型张量.

(ii) 对2.18节中提到的函数空间$C[-1,1]$，我们有第二个例子. 线性微分算子(例如$x^2 d/dx$)将函数(这个空间中的"向量")变为另一个函数(向量). 这种运算是线性的，所以它也是这一空间中的一个$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$型张量.

(iii) 第三个例子是应力张量. 熟悉介质力学的读者是知道应力张量的. 给出一个有应力的材料，且在此材料中给出一个假想的平面，则该应力张量将给出此平面上的应力向量(即单位面积上，一边的材料对另一边的材料所施加的力). 现在，平面是一种曲面，而曲面是用一次形式来表示的. 这样就证明了应力张量是一次形式的一个线性向量值函数，或是一个$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$型张量.

2.24 张量的分量和外积

由下述方法可给出一个简单的$\binom{2}{0}$型张量：给定两个向量$\bar{V}$和$\bar{W}$，我们构造一个称为$\bar{V}\otimes\bar{W}$的张量，它对两个一次形式$\tilde{p}$和$\tilde{q}$的作用就是乘积$\bar{V}(\tilde{p})\bar{W}(\tilde{q})$：

$$\bar{V}\otimes\bar{W}(\tilde{p},\tilde{q})\equiv\bar{V}(\tilde{p})\bar{W}(\tilde{q}). \tag{2.30}$$

运算"$\otimes$"称为"外积"，"直积"或"张量积"．把这一定义推广到任意个和任意型的张量上去，显然是可行的．$\binom{N}{M}$型张量与$\binom{N'}{M'}$型张量的外积是$\binom{N+N'}{M+M'}$型张量．

张量的**分量**指的是把基向量和基一次形式取为变量时得出的值．如果$\mathbf{S}$是一个$\binom{3}{2}$型张量，则它在基$\{\bar{e}_i\}$上的分量是

$$S^{ijk}{}_{lm}\equiv\mathbf{S}(\tilde{\omega}^i,\tilde{\omega}^j,\tilde{\omega}^k;\bar{e}_l,\bar{e}_m). \tag{2.31}$$

如果$\mathbf{S}$的变量的次序是要紧的话，那么$S^{ijk}{}_{lm}$指标的次序也是要紧的．

就如2.20节中对一次形式所做的那样，可进一步讨论张量场的分量和它们的可微性．

习 题 2.5

(a) 证明一个一般的$\binom{2}{0}$型张量不能简单地表示为两个向量的外积．(提示：计算一下，一个$\binom{2}{0}$型张量可能有的分量数目．)

(b) 证明$\binom{1}{1}$型张量$\bar{V}\otimes\tilde{\omega}$有分量$V^i\omega_j$．

习 题 2.6

证明 P 点所有 $\binom{2}{0}$ 型张量的集合，在定义了类似于(2.16b)式的加法后是一个向量空间. 证明 $\tilde{e}_i\otimes\tilde{e}_j$ 是此空间的一个基. (这样，虽然一般的 $\binom{2}{0}$ 型张量并非简单地就是一个外积，但它可以表示为这种张量的一个和式.) 这个向量空间记为 $T_P\otimes T_P$.

2.25 缩并

在习题 2.5 中，我们曾指出集合 $\{V^i\omega_j\}$ 是一个 $\binom{1}{1}$ 型张量的分量. 现在，通过对指标的求和，我们得到一个与基无关的数 $V^i\omega_i$，它是 $\tilde{\omega}$ 在 $\bar{V}$ 上的值，这可以看成是一个 $\binom{0}{0}$ 型张量. 类似地，我们可以证明若 S^i_{jk} 和 P^{lm} 分别是 $\binom{1}{2}$ 型和 $\binom{2}{0}$ 型张量，则 $S^i_{jk}P^{lm}$ 是一个 $\binom{3}{2}$ 型张量的分量，$S^i_{jk}P^{jm}$ 是一个 $\binom{2}{1}$ 型张量的分量，$S^i_{jk}P^{kl}$ 是另一个 $\binom{2}{1}$ 型张量的分量……. 类似于(2.27)式，这一运算也叫做缩并，可产生新的张量.

我们可以简短地证明一下，缩并是与所使用的基无关的. 考察 $\binom{2}{0}$ 型张量 $\mathbf{A}$，$\binom{0}{2}$ 型张量 $\mathbf{B}$，以及它们(在某一基中)的缩并 $A^{ij}B_{jk}$. 我们可断言：它们是一个 $\binom{1}{1}$ 型张量 $\mathbf{C}$ 的分量，它对任意向量 $\bar{V}$ 与一次形式 $\tilde{\sigma}$ 有

$$\mathbf{C}(\tilde{\sigma};\bar{V})=\left(\sum_j A^{ij}B_{jk}\right)\sigma_i V^k=\sum_j \mathbf{A}(\tilde{\sigma};\tilde{\omega}^j)\mathbf{B}(\bar{e}_j,\bar{V}).$$

由 $\mathbf{A}$ 的第二个变量的线性性，我们可把上式写为

$$\mathbf{C}(\tilde{\sigma};\bar{V})=\mathbf{A}\left(\tilde{\sigma},\sum_j \mathbf{B}(\bar{e}_j,\ \bar{V})\tilde{\omega}^j\right),$$

因为量 $\mathbf{B}(\bar{e}_j,\ \bar{V})$ 等就是一些数．但是在 2.20 节中，我们实际上证明了与坐标无关的下列结果：

$$\sum_j \mathbf{B}(\bar{e}_j,\ \bar{V})\tilde{\omega}^j=\mathbf{B}(\quad,\bar{V}),$$

因为它需要(在空位中)填入一个向量变量，所以它是一个一次形式(对固定的 $\bar{V}$ 而言)．这个一次形式在 $\mathbf{A}$ 中占有一个空位，因此我们证明了下列结果

$$A^{ij}B_{jk}=C^i_k \Leftrightarrow \mathbf{C}(\tilde{\sigma};\bar{V})=\mathbf{A}(\tilde{\sigma},\ \mathbf{B}(\quad,\bar{V})),$$

是与任意基无关的(参看习题 2.8)．

习　题　2.7

对$\binom{3}{2}$型张量 $Q^{ijk}{}_{lm}$ 的一对指标缩并，试问可以得出多少不同的$\binom{2}{1}$型张量？再进行一次缩并，问可以得出多少$\binom{1}{0}$型张量．

习　题　2.8

设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是两个$\binom{1}{1}$型张量，把它们看成向量的向量值线性函数，即若 $\bar{V}$ 是向量，则 $\mathbf{A}(\bar{V})$ 和 $\mathbf{B}(\bar{V})$ 都是向量．如果定义 $\mathbf{C}(\bar{V})$ 为

$$\mathbf{C}(\bar{V})=\mathbf{B}(\mathbf{A}(\bar{V})),$$

证明 $\mathbf{C}$ 也是一个$\binom{1}{1}$型张量．证明它的分量是

$$C^i_j=B^i_k A^k_j.$$

再试讨论这一情况与 1.6 节中定义的线性变换之间的关系．

2.26 基的变换

张量分量在基变换下的变换性质是张量的古老定义的核心. 前不久，我们用这里采用的线性函数的讲法代替了分量变换的定义. 我们拖到现在才花时间去考察基的变换，这本身就表明了这两种方法在概念上差别之大. 但这并不是说这些变换不重要，关于张量的大多实际计算都涉及到对它们的分量的运算，同时掌握它们的变换性质也是必要的.

我们将考察定义在 M 上某一点 P 的向量和张量. 假定我们开始用向量基 $\{\bar{e}_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$，然后希望用基 $\{\bar{e}_{j'},\ j'=1,\ \cdots,\ n\}$ 来代替它. (我们在指标上加撇以区别一个基与另一个基.)于是在 T_P 中存在一个从老基变到新基的线性变换 Λ

$$\bar{e}_{j'}=\Lambda^i_{j'}\bar{e}_i. \tag{2.32}$$

这里 $\Lambda^i_{j'}$ 是任意非奇异矩阵(否则 $\{\bar{e}_{j'}\}$ 不会是线性无关的). $\Lambda^i_{j'}$ 不是某一个张量的分量，因为它们的指标与两个不同的基有关. 它简称为变换矩阵.

老的一次形式基满足(2.23)式：

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_k)=\delta^i_k.$$

用 $\Lambda^k_{j'}$ 相乘,并应用(2.32)式及线性性，有

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'})=\delta^i_k\Lambda^k_{j'}=\Lambda^i_{j'}. \tag{2.33}$$

矩阵 $\Lambda^{i}_{k'}$ 有逆矩阵，记为 $\Lambda^{k'}_j$:

$$\Lambda^{k'}_i\Lambda^i_{i'}=\delta^{k'}_{i'},\quad \Lambda^{k'}_j\Lambda^i_{k'}=\delta^i_j. \tag{2.34}$$

用 $\Lambda^{k'}_i$ 乘(2.33)式给出

$$\Lambda^{k'}_i\tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'})=\delta^{k'}_{j'}.$$

将此式与(2.23)式比较，则有

$$\tilde{\omega}^{k'}=\Lambda^{k'}_i\tilde{\omega}^i. \tag{2.35}$$

这是与(2.32)式相对应的式子：为了使两个基都满足(2.32)式，

基一次形式的变换与基向量的变换相反(即变换矩阵互为逆矩阵)。

现在变换分量就简单了：

$$V^{i'}=\tilde{\omega}^{i'}(\bar{V})=\Lambda^{i'}_{j}\tilde{\omega}^{j}(\bar{V})=\Lambda^{i'}_{j}V^{j}, \qquad (2.36)$$

$$q_{k'}=\tilde{q}(\bar{e}_{k'})=\tilde{q}(\Lambda^{j}_{k'}\bar{e}_{j})=\Lambda^{j}_{k'}\tilde{q}(\bar{e}_{j})=\Lambda^{j}_{k'}q_{j}, \qquad (2.37)$$

而对高阶的张量也有类似的结果(参见下面的习题 2.9)。这些变换法则表明：向量分量与基一次形式的变换法则是相同的，它们与一次形式的分量以及基向量的变换法则正好相反(即使用逆矩阵)。为了使得诸如 $V^{i}\bar{e}_{i}$, $V^{j}\sigma_{j}$ 等和式与坐标无关，这是合理的。这正表明了我们对指标取上下位置以及应用求和规定所带来的另一种方便：指标的位置自动给出了它的变换法则。例如，V^{i} 和 $\tilde{\omega}^{i}$ 服从同一法则，即

$$V^{i'}=\Lambda^{i'}_{j}V^{j}.$$

这里不能用矩阵 $\Lambda^{j}_{i'}$，因为必须对不加撇的指标求和，而且必须对一个上指标和一个下指标进行。

这些相反的变换法则给出了老名称“逆变”和“协变”。我们现在的向量以前称为逆变向量，因为它的分量的变换法则与基向量的变换法则相反(“逆变”)。类似地，现在的一次形式是以前的“协变向量”，因为它们的分量与基向量有相同的变换性质。近代的观点强调了下列事实：向量和一次形式实际上都不随基变换而改变，它们是与坐标无关的几何实体。所以，近代的术语已抛弃了陈旧的这些名称，因为后者过分强调了这些实体的与坐标有关的描述方式。

习　题　2.9

证明一个$\binom{2}{0}$型张量的分量如两个向量那样变换，即

$$T^{i'j'}=A^{i'}_{k}A^{j'}_{l}T^{kl}. \tag{2.38}$$

把这一关系推广到$\binom{N}{N'}$型张量的情况中去。

习　题　2.10

如果张量在一个基中的所有分量都为零，证明在任意基中它们都是零.（于是我们称该张量是零张量. 由此得到：如果两个张量在某一个基中有相同的分量，则这些分量在任意基中都是相同的，此时称这两个张量是相等的.）

习　题　2.11

在 n 维向量空间中选定一个特定的基 $\{\vec{e}_i\}$，与此相关给出一组数字 $\{A^i_j,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n\}$. 我们定义另一组数字 $A^{i'}_{j'}=A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}A^{i}_{j}$，并把它们称为"张量"$A$ 在新基 $\{\vec{e}_{j'}\}$ 中的分量. 证明这个"张量"确实如我们命名的那样是一个张量. 这表明我们可以采用下列观点：张量是按给定法则变换的一组数 $\{A^i_j\}$. 这里不同于我们已经用过的定义.

考察一下**坐标变换**所引起的基变换是特别有趣的，这些情况我们在 2.6 节结束时简略地提到过. 设流形 M 的一个区域 U 有坐标系 $\{x^i,\ i=1,\cdots,\ n\}$，我们用下列方程：

$$y^{i'}=f^{i'}(x^1,\ \cdots,\ x^n),\ i'=1,\ \cdots,\ n, \tag{2.39}$$

引入新函数 $\{y^{i'},i'=1,\cdots,n\}$，这些方程可以简记作 $y^{i'}=f^{i'}(x^i)$. 如果在 U 中偏导数 $\partial y^{i'}/\partial x^j$ 的雅可比矩阵的行列式不为零，则它们给出了一个坐标变换. U 中的给定点 P 可以用两套不同的数字 $\{x^i\}$ 或 $\{y^{i'}\}$ 来表示. 同样在 P 点我们有两套不同的坐标向量基 $\{\partial/\partial x^i\}$ 和（由微积分的链法则）

$$\frac{\partial}{\partial y^{i'}}=\frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.40}$$

将上式与(2.32)式比较，我们得到

$$\Lambda^i_{j'}=\frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}}.\tag{2.41}$$

类似地，逆矩阵为

$$\Lambda^{k'}_j=\frac{\partial y^{k'}}{\partial x^j},\tag{2.42}$$

运用偏导数的链法则，上式是容易证明的：

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}}\frac{\partial y^{j'}}{\partial x^k}=\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\delta^i_k.$$

重要的是知道(2.42)式只是定义了 U 中变换场 $\Lambda^{k'}_j$ 的一个受限制的类. 在 U 中任意一点 P，我们可以任意地选取 $\Lambda^{k'}_j$ 的所有 n^2 个元素(当然要满足使其行列式不为零的条件)，但在 P 的邻域中却不是这样，因为(2.42)式意味着

$$\partial\Lambda^{k'}_j/\partial x^i=\partial\Lambda^{k'}_i/\partial x^j,\tag{2.43}$$

当然并不要求任意场 $\Lambda^{k'}_j$ 都要满足这个对称性. 这是一个例证，说明每一个基向量的场并非都是一个坐标基.

2.27 对分量的张量运算

给定一张量 $\mathbf{T}$ 及其在某一基中的分量 $\{T^{i\cdots}{}_{j\cdots}\}$，假定用数 a 乘每一分量，得到 $\{aT^{i\cdots}{}_{j\cdots}\}$，它们显然是张量 $a\mathbf{T}$ 的分量，而且这意味着用 a 乘 $\mathbf{T}$ 的所有分量这一运算是与基无关的：如果我们从坐标 $\{y^{i'}\}$ 开始，我们就会在这一新坐标中得到 $a\mathbf{T}$ 的分量. (如果我们只用 a 去乘 $\{T^{i\cdots}{}_{j\cdots}\}$ 中的一部分，那就不能这样说了.) 因此，运算 $\{T^{i\cdots}{}_{j\cdots}\}\to\{aT^{i\cdots}{}_{j\cdots}\}$ 唯一地对应于与基无关的表述 $\mathbf{T}\to a\mathbf{T}$. 类似地，两个张量的外积

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B}\to\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$$

也有唯一的分量的对应(参见习题2.4)：

$$\{A^{i\cdots}{}_{j\cdots}\},\ \{B^{k\cdots}{}_{l\cdots}\}\to\{A^{i\cdots}{}_{j\cdots}B^{k\cdots}{}_{l\cdots}\},$$

这与用何种坐标基或非坐标基都无关. 一般地，对分量的运算，

如果能产生同一张量的分量，且与基无关，则称此运算是一种张量运算．今后我们只讨论这种运算．下面的四部分总结了张量的代数运算(以后我们还要讨论有关微分的一些运算)：

(i) 相同类型张量分量的加法(和减法)．

(ii) 用一个数去乘所有的分量，给出同类型的一个张量．

(iii) 两个张量分量的相乘，给出一个张量，它的类型是两个因子的类型的和．

(iv) 一对指标的缩并，其中一个是上指标，另一个是下指标．一个方程，如果其中只有用这些运算结合起来的分量的话，则称它是一个"张量方程"．由习题 2.10 可推得：如果在某一基中，进行了一系列运算而给出了一个张量方程，那么这个方程在一切基中都成立．这就使得我们能选取方便的基去进行特定的计算．

2.28 函数和标量

一个标量定义为$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$型张量，即流形上的一个函数，但其定义与任何特殊基的选取无关．例如，缩并 $V^i\omega_i$ 是标量，因为它的值与计算分量所采用的基无关．另一方面，分量 V^1 也是流形上的一个函数，它在每一点有一个数值．但是它不是一个标量，因为它的值依赖于基．换句话说，存在某一(标量)函数 $f(P)$ 使得 $V^1(P)=f(P)$，这里指标"1"是对某一特别基而言的．当这一基改变后，新的 $V^1(P)$ 就不等于 $f(P)$ 了．因此 $f(P)$ 是一标量，在某一基中，它的值碰巧等于 $\vec{V}$ 的一个分量的值．但是 V^1 不是一个标量，因为它的值随基的改变而改变．所以，我们看到，一个量是否是"标量"或者单单地是一个"函数"，这取决于当基改变时对它的解释，而不是它的实际值．

2.29 向量空间上的度规张量

正如我们在 1.5 节中所看到的，大部分熟悉的向量代数都与向量空间的一个内积有关. 所谓内积是这样一个法则，它使两个向量对应于一个数（“点积”），它对两个向量都是线性的. 因此内积是一个$\binom{0}{2}$型张量，称为度规张量，记作 g|. 由此，我们定义

$$\mathrm{g}|(\bar{V}, \bar{U}) = \mathrm{g}|(\bar{U}, \bar{V}) = \bar{U}\cdot\bar{V}. \tag{2.44}$$

上面的第一个等式要求 $\bar{U}\cdot\bar{V}$ 应与 $\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 的次序无关，因此我们说 g| 是一个对称张量. 在基 $\{\bar{e}_i\}$ 中，它的分量是

$$g_{ij} = \mathrm{g}|(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{e}_i\cdot\bar{e}_j. \tag{2.45}$$

这些分量构成一个 $n\times n$ 对称矩阵. 根据后面将说明的道理，我们还要求这一矩阵有逆矩阵. 若碰巧这个矩阵是单位矩阵，即若有

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

我们则称这个度规张量是欧几里得度规，并把该向量空间称为欧几里得空间. 如果 g_{ij} 不是这样简单，那我们能说些什么呢？好吧，我们总能自由地选取一个新的基 $\{\bar{e}_{i'}\}$，在这一基中，新的度规分量

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'}\Lambda^l{}_{j'}g_{kl} \tag{2.46}$$

会简单些. 把这一方程看成是矩阵方程，把它重新表示为

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'}g_{kl}\Lambda^l{}_{j'}$$

是有好处的. 由 1.6 节中的讨论，容易看出这就是矩阵方程

$$g' = \Lambda^{\mathrm{T}}g\Lambda, \tag{2.47}$$

这里 Λ^{T}，是矩阵 Λ 的转置，它的矩阵元是 $\Lambda^k{}_{i'}$. 我们将看到，适当地选取 Λ，能把矩阵 g' 简化到一个很简单的形式. 因为 Λ 是任

意的，我们把它取为两个矩阵的乘积

$$\Lambda = OD, \tag{2.48}$$

这里 O 是正交矩阵($O^T = O^{-1}$)，而 D 是对角矩阵(因此，特别有 $D^T = D$)。于是从(1.41)式，有

$$\Lambda^T = (OD)^T = D^T O^T = DO^{-1}$$

和

$$g' = DO^{-1}gOD. \tag{2.49}$$

熟知的是，任意对称矩阵，例如 g，可以通过正交矩阵进行一个相似变换，简化为对角形式 g_d。让我们选取有此性质的 O，则

$$g_d = O^{-1}gO,$$
$$g' = Dg_dD.$$

如果 g_d 是矩阵 $\mathrm{diag}(g_1, g_2, \cdots, g_n)$，而待定的矩阵 D 是 $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，则 g' 为

$$g' = \mathrm{diag}(g_1d_1^2, g_2d_2^2, \cdots, g_nd_n^2). \tag{2.50}$$

现在我们选定 $d_j = (|g_j|)^{-1/2}$，因此 g' 对角线上的元素或为 $+1$，或为 -1. 我们不能用 d_j 来改变 g_j 的符号，只能改变 g_j 的大小。现在 g_d 的对角元素是 g 的本征值，而且除了排列的次序外，它们是唯一的。而且，因为 g 有一个逆，这些本征值都不为零，如果我们这样地选择，使得所有的 -1 先出现，那我们就证明了下列定理：任意有度规张量的向量空间都有一个基，在这个基中度规张量具有标准型 $\mathrm{diag}(-1, \cdots, -1, 1, \cdots, 1)$。这一基称为正交归一基。这些对角线的和——标准型的迹，称为该度规的符号差。

习　题　2.12

对下列各矩阵，分别求出能把它们简化为单位对角形式的矩阵 Λ：

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这个定理是非常重要的，它说明在一个向量空间上只有为数不多的不同种度规张量．如果度规是正定的，则它的标准型中的数字都为 $+1$，而该空间就是欧几里得空间．如果度规是负定的，也把它称为是欧几里得的．因为对于空间，重要的是这些符号是一样的，还是不一样的．如果度规没有确定的符号，则称它是不定的．一种重要的情况是标准型为$(-1, 1, \cdots, 1)$，这一度规通常称为闵可夫斯基度规．在狭义相对论中，是 $n=4$ 时的这种度规，我们下面就要详细讨论这种情况．

这一标准型的另一结论是，它在该向量空间中挑选了一个优先的基的集合，即正交归一基的集合．在欧几里得空间 E^n 中，这种基称为笛卡儿基．度规张量在这种基中的分量为 $g_{ij}=\delta_{ij}$，或用矩阵表示为 $g=I$．从这种基中的一个到另一个的变换矩阵 Λ_C 满足

$$I=\Lambda_C^T I \Lambda_C \Rightarrow \Lambda_C^T=\Lambda_C^{-1}. \tag{2.51}$$

因此正交矩阵是笛卡儿基之间的变换矩阵．这些矩阵构成一个群(两个正交矩阵的乘积也是一个正交矩阵)，称为欧几里得对称性群，记作 $O(n)$．同样，闵可夫斯基度规选出优先的洛伦兹基，在这种基中，度规的分量组成矩阵

$$\eta=\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1). \tag{2.52}$$

从一个洛伦兹基到另一个洛伦兹基的变换矩阵 Λ_L 满足

$$\eta=\Lambda_L^T \eta \Lambda_L. \tag{2.53}$$

这种矩阵称为洛伦兹变换．不难证明它们也构成群，这群叫做洛伦兹群，记为 $L(n)$或 $O(n-1, 1)$．

从张量代数的观点来看，我们还没有提到度规张量的一个最重要的作用：它把向量映为(1-1 地)一次形式．考察向量 $\bar{V}$，对固定的 $\bar{V}$，$\mathrm{g}|(\bar{V},)$ 是把向量映为实数的一个线性函数，即一个一次形式．我们用下式表示：

$$\tilde{V}=g|(\vec{V},\quad). \tag{2.54}$$

前面我们要求过，矩阵 g_{ij} 有逆矩阵，这使得上述映射是1-1的，因此只存在一个向量 $\vec{V}$ 能映为 $\tilde{V}$. 为了看清这一点，让我们来考察这方程的分量形式. 用 V_i 表示 $\tilde{V}$ 的分量，则有

$$\begin{aligned}V_i=\tilde{V}(\vec{e}_i)&=g|(\vec{V},\vec{e}_i)=g|(V^j\vec{e}_j,\vec{e}_i)\\&=V^jg|(\vec{e}_j,\vec{e}_i)=V^jg_{ji}=g_{ij}V^j,\end{aligned}$$

上式中最后一个等式是由 g| 的对称性推得的. 现在，我们用 g^{ij} 来标记 g_{ij} 的逆矩阵:

$$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k. \tag{2.55}$$

于是我们有

$$g^{ki}V_i=g^{ki}g_{ij}V^j=\delta^k_jV^j=V^k, \tag{2.56}$$

这表明该映射是可逆的;度规把一次形式和向量一一地配成对. 这种配对的关系如下:

$$V_i=g_{ij}V^j, \tag{2.57}$$

$$V^j=g^{jk}V_k. \tag{2.58}$$

注意，我们已把逆矩阵的元素记为 g^{ij}，而这就使得(2.58)式遵循张量方程的通常指标规定. 但是为了一致，我们必须证明数 g^{ij} 确实是一个 $\binom{2}{0}$ 型张量的分量. 下面的习题就是要证明这一点.

习 题 2.18

(a) 证明 $\{g^{ij}\}$ 是 $\binom{2}{0}$ 型张量 $g|^{-1}$ 的分量. 这可通过证明这些分量有适当的变换性质，或者证明它们定义了一个一次形式上的双线性函数.

(b) 如果向量基 $\{\vec{e}_i\}$ 是正交归一的，试证明它的对偶一次形式基 $\{\tilde{\omega}^i\}$ 也是正交归一的，这指的是 $g|^{-1}(\tilde{\omega}^i,\tilde{\omega}^j)=\pm\delta^{ij}$.

用同样方法，度规也可以把一个$\binom{2}{0}$型张量 A 映为一个$\binom{1}{1}$型张量：

$$A^i_j = g_{jk}A^{ik}. \tag{2.59}$$

进一步，还可以映为一个$\binom{0}{2}$型张量：

$$A_{lj} = g_{lm}A^m_j = g_{lm}g_{jk}A^{mk}, \tag{2.60}$$

还能再映回到原来的张量：

$$A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}. \tag{2.61}$$

这些映射称为**指标的升和降**，而且习惯上把所有这些张量都用同一名称（如 A）来标记，而仅用它们指标的位置来区别它们。在一个带度规的向量空间中，说明某一张量是$\binom{N}{N'}$型的，或者是$\binom{N-1}{N'+1}$型的、$\binom{N+1}{N'-1}$型的，有时意义并不大。而只要说明张量的**阶数**，即数 $N+N'$。

在欧几里得向量空间中，对笛卡尔基有 $g_{ij}=\delta_{ij}$。因此，$g^{ij}=\delta^{ij}$，$U^i=U_i$。所以在这一情况中，在向量的分量和与其相伴的一次形式的分量之间就**没有**区别了。这就是欧几里得向量代数的初等论述中对向量和一次形式不加区分的原因，也是在这些论述中只采用正交归一基的原因。但是在欧几里得空间的非正交归一基中，以及在带不定度规的空间的**任意**基中，一次形式的分量和与它对应的向量的分量之间会有很大的差别。在 2.31 节中讨论狭义相对论时，我们会遇到一个有趣的例子。

2.30 流形上的度规张量场

流形上的度规张量场 $\mathbf{g}$ 是一个$\binom{0}{2}$型对称张量场，它在每

一点都必须有一个逆．在每一点 P 处，它提供了切空间 T_P 上的一个度规．上一节讨论过的所有性质都可直接地拿来，但还有其他一些情况．

流形 M 上定义某一个$\binom{0}{2}$型张量，并作为该流形度规，这赋予 M 很丰富的结构．它立即变成"刚性的"：我们可以定义诸如距离(下详)以及曲率(参见第六章)这样一些概念．这些概念在许多应用中，尤其是在广义相对论中是如此的重要，以致似乎使得它成为物理学家最为熟悉的一种几何．但是，从微分几何的观点来看，这种几何具有"高一级"的结构：它选定了一种特殊的张量场，这样就超出简单微分流形的概念了．如果这样做的话，很可能会忽视通常流形本身所具有的丰富的几何结构，诸如李导数和微分形式这一类重要工具都与度规无关．因此我们在本书中将把度规张量放到一个不很突出的地位，甚至在讨论定义了度规张量的流形的应用时也是这样．在本节中，我们简短地考虑一下它的一些最简单的性质．度规几何的进一步讨论，在第六章中进行．

对度规张量的可微性，我们可以任作假定，但它至少应该是连续的．这意味着它的标准形式应处处为一常数，因为它仅由整数构成，而整数是不能连续改变的．因此我们可以谈论场 g| 的符号差．只要我们在每一点都能自由地选取基的变换矩阵 Λ，我们就能从任意基场变到一个整体上是正交归一的基．采用这些基时，g| 的分量都是标准的．但是，这一变换场 Λ 通常不是坐标变换(即它不满足(2.43)式)．而事实上，一般找不到一个坐标基，它在流形 M 的任意开区域 U 中却是正交归一的(参见习题 2.14)．把 R^n 认为是一种在每一点都有一个欧几里得度规 δ_{ij} 的流形，它是上面情况的一个明显的例外．现在就是在这种

情况中，也只有在笛卡儿坐标中能生成一个正交归一基．习题2.1中举了 R^2 中极坐标这个例子．极坐标基是正交的，但不是归一的．经重新标度所得到的正交归一基就不是一个坐标基．

习 题 2.14

证明 C^∞ 度规张量场 $\mathbf{g}$ 是局部平直的，这指的是，任意点 P 都有一个邻域，在其中存在一个坐标系，使得 $\mathbf{g}$ 在其基中的分量 g_{ij} 具有下列一些性质：

(i) $g_{ij}(P)=\pm\delta_{ij}$ （在 P 点是一个正交归一系）；

(ii) $\left.\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_P=0$ （在 P 点附近较好地近似于正交归一系）；

(iii) $\left.\dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\partial x^l}\right|_P$ 不必全为零 （不是真正的正交归一坐标系）．

习 题 2.15

在欧几里得平面中采用极坐标，求下列各情况中度规的分量：

(a) 基取为 $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta\}$；

(b) 基取为习题2.1中的 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$．试用 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial\theta$ 来表示 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$．

习 题 2.16

分别在习题2.15的两个基中求 $\tilde{\mathrm{d}}f$ 和向量 $\bar{\mathrm{d}}f$ 的分量．

在这里提醒一下是有必要的：在欧几里得空间中，用曲线坐标进行向量演算的大多数论述，都用到了向量在这类正交归一基中的分量．这种做法使人们能回避去区别向量和一次形式．但是当我们把下面所得到的有关表达式，例如说用分量表示的向量场的散度的表达式，去与其他处理所给出的表达式比较时，就必须考虑到基可能不同．

度规的一个重要性质是它允许我们在流形上定义长度．若

曲线的切线为 $\vec{V}=\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\lambda$，则位移 $\mathrm{d}\bar{x}$ 的长度平方为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}l^2 &\equiv \mathrm{d}\bar{x}\cdot\mathrm{d}\bar{x}=(\vec{V}\mathrm{d}\lambda)\cdot(\vec{V}\mathrm{d}\lambda)=\vec{V}\cdot\vec{V}(\mathrm{d}\lambda)^2\\ &=\mathrm{g}|(\vec{V},\vec{V})\mathrm{d}\lambda^2.\end{aligned}\tag{2.62}$$

（这里符号"d"是无穷小，而不是梯度.）若度规是正定的，则对所有 $\vec{V}\neq 0$ 有 $\mathrm{g}|(\vec{V},\vec{V})>0$. 在这种情况中，$\mathrm{d}l^2$ 是正的，我们有

$$\mathrm{d}l=(\mathrm{g}|(\vec{V},\vec{V}))^{1/2}\mathrm{d}\lambda,\tag{2.63}$$

这是曲线线元的长度. 然而，在不定度规时，长度的平方就没有确定的符号。此时根据 $\mathrm{d}l^2$ 为正值（"类空"的）或为负值（"类时"的）来区分曲线. 我们定义实数

$$\mathrm{d}l=|\mathrm{g}|(\vec{V},\vec{V})|^{1/2}\mathrm{d}\lambda\tag{2.64}$$

为类空曲线的"本征距离"，或类时曲线的"本征时间". 对于"类零"曲线，它为零. 在讨论不定度规时，我们必须对零范数的向量与确实的零向量（即其分量全为零）加以仔细区分.

2.31 狭义相对论

把符号差为 +2 的向量空间 R^4 看作流形，这就是物理学中最重要的流形之一：闵可夫斯基时空，即狭义相对论的时空. 狭义相对论的初等论述经常并不是明显地引入度规张量，但是这些论述给我们提供了看清度规该是什么东西所需的一切. 尤其是，我们知道对时空存在着一个称为洛伦兹坐标系的优先坐标系，且在这一系中，如果有坐标间隔为 $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的两个事件，则数

$$\Delta s^2=-c^2(\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\tag{2.65}$$

是与洛伦兹系无关的（这里 c 表示光速）. 让我们定义 $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ 来改变标度. （在相对论中数标是从 0 而不是从 1 开始的，这是一个常规.）我们采用下列惯例：用希腊字母表示时空指标，用这种方法，可以区分只适用于相对论的讨论与更

一般范围中的讨论．(2.65)式具有形式：

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \tag{2.66}$$

这里 $\eta_{\alpha\beta}$ 是矩阵

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{2.67}$$

我们现在把(2.66)式看作分量是$(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$的向量 $\Delta\vec{x}$ 的伪范数(1.5节)的定义．容易看出这一伪范数满足1.5节中的公理(Nii)和(Niv)，这些对定义一个内积是必需的．显然

$$\vec{V}\cdot\vec{W} = \eta_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta. \tag{2.68}$$

所以，我们看到 $\eta_{\alpha\beta}$ 是度规张量的标准形式，而洛伦兹坐标系就是相伴的正交归一基．

用这个度规，我们就能很好地说明向量分量及其相伴的一次形式之间的区别．在一个洛伦兹坐标系中，

$$U_0 = \eta_{0\alpha}U^\alpha = -U^0, \tag{2.69a}$$

$$U_x = U^x,\ U_y = U^y,\ U_z = U^z. \tag{2.69b}$$

考察函数 f 的向量梯度，它是由一次形式 $\tilde{d}f$ 映射而得的向量．梯度 $\tilde{d}f$ 具有分量$(\partial f/\partial x^0,\ \partial f/\partial x^1,\ \cdots)$，而向量 $\bar{d}f$ 具有分量$(-\partial f/\partial x^0,\ \partial f/\partial x^1,\ \cdots)$．在狭义相对论的许多处理中，人们引入梯度时是把它作为一个具有分量$(-\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \cdots)$的向量算子的．这一奇特的符号是由于梯度实际上是一个一次形式而强加上去的．

带有度规 g| 的流形M，仅当存在一个覆盖整个M的单个坐标系，且在这一系中 g| 具有分量 $\eta_{\alpha\beta}$ 时，才称为闵可夫斯基时空．采用这一种坐标系来做研究是很有利的，但是它并不是 M 上仅有的坐标系．我们同样可以选择另一些坐标系，例如与加速运动的观察者相联系的那些坐标系．只要我们遵循微分几何的一般法则，我们就能得出正确的物理结果．

2.32 参考文献

对流形的更精确和严格讨论，尤其是对纤维丛的丰富而有用结构的讨论，请参考：

Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977).

用上同调理论来证明固定点定理(读了后面4.24节的内容以后)，请参考：

M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Boston, 1970) vol. 1, pp. 8～54.

关于切丛及有关的结构，请参考：

R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics*, two volumes (Benjamin, Reading, Mass., 1970);

R. Abraham & J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd edn (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978).

从量子场论和引力理论的近代研究观点来讨论纤维丛的有：

B. Carter, Underlying mathematical structures of classical gravitation theory, in *Recent Developments in Gravitation*, ed. M. Levy & S. Deser (Plenum, New York, 1979).

A. Trautman, *Rep. Math. Phys.* **10**, 297 (1976).

对函数空间的讨论，请参考 Choquet-Bruhat *et al.*，以及有关泛函分析的任何课本，例如：

F. Riesz & B. Sz. -Nagy, *Functional Analysis* (Ungar, New York, 1955).

有关分布理论(狄拉克的 δ 函数)的讨论可参看：Choquet-Bruhat *et al.* (1977)，以及

G. Friedlander, *The Wave Equation on a Curved Space Time*(Cam-

bridge University Press, 1976).

把度规张量简化为标准型所需的矩阵代数可以在第一章所援引的参考文献中找到．在三维欧几里得空间中，用曲线坐标处理向量演算的一本较好参考书是：

W. Magnus & F. Oberhettinger, *Functions of Mathematical Physics* (Chelsea, New York, 1949), chapter 9.

在初等水平上讨论狭义相对论中用到的流形的度规结构(闵可夫斯基空间)的书有：

E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics* (Freeman, San Francisco, 1963).

闵可夫斯基本人对这一专题的论述编入：

W. Perrett & G. B. Jeffery, *The Principle of Relativity* (Dover, New York, 1924).

讨论了狭义相对论中向量梯度，但没有利用一次形式优点的例子，可参看：

R. P. Feynman, R. B. Leighton & M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2, § 25-3 (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964).

关于转动群的欧拉角参数化及其他参数化的详细讨论请参看：

H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950). 读者会发现在学习本书第三章有关转动群的内容时，参考 Goldstein 的处理方法，将会有很大的帮助。

第三章　李导数和李群

3.1　引言：流形上的向量场给出流形到其自身中的映射

在前几节中，我们已讨论了有关指标符号的某些方面．这种符号对实际的数值计算常常是必要的．但是在发展数学家们所谓的完善的几何概念时，它也常常是一种妨碍．以前我们在向量和张量时用的是一种与任意基无关的方法，现在我们就继续用这种方法来发展几何学中最有用的解析工具之一：沿一个向量场所定义的线汇的李导数．

在2.12节中，我们已提及“线汇”的概念：这是曲线的一个集合，它们互不相交且布满流形或流形的一部分．在流形 M 的区域中，每一点在且仅在一根曲线上，因为每一根曲线是点的一维集合，该曲线集合就是 $(n-1)$ 维的．(适当地参数化后，该曲线集合本身就是一个流形．)能推得其他情况的关键点是：该线汇给出了此流形到其自身中的一个自然映射．如果 λ 是这些曲线的参数，则任意足够小的数 $\Delta\lambda$ 定义了一个映射，它把每一点映成线汇中同一根曲线上参数再增加 $\Delta\lambda$ 的那一点(参看图3.1)．这是一个1-1映射，至少在有足够好的性质的向量场(C^1 场就行了)的任意区域中是这样．如果向量场是 C^∞ 的，则这一映射就是一个微分同胚(参见2.4节)．如果此映射对一切 $\Delta\lambda$

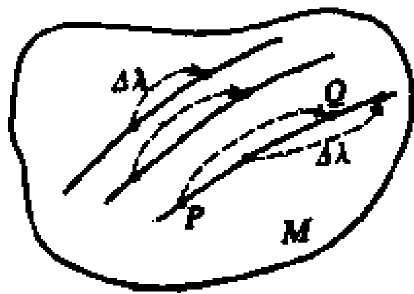


图3.1　M 到其自身的映射，它把每一点映到线汇中同一根曲线的另一点，后者的参数比前者的参数大某一个固定数 $\Delta\lambda$．

都存在，那么存在这些映射组成的一个一维可微族（事实上是一个单参数李群，以 $\Delta\lambda_1+\Delta\lambda_2$ 为其合成法则）．这种映射称为沿该线汇的一个"拉曳"，或一个李拉曳．

3.2 函数的李拉曳

设函数 f 定义在流形上，则上述映射通过一种显而易见的方法，可把 f 沿着线汇"移动"，从而定义一个新的函数 $f^*_{\Delta\lambda}$：即如果图形 3.1 中某一个曲线上的 P 点映为同一曲线上参数大 $\Delta\lambda$ 的 Q 点，则新场 $f^*_{\Delta\lambda}$ 在 Q 点的值等于 f 在 P 的值，即

$$f(P)=f^*_{\Delta\lambda}(Q).$$

（$f^*_{\Delta\lambda}$ 上的"*"号在这里简单地表示"新"的意思．）如果碰巧对所有的 Q，$f^*_{\Delta\lambda}(Q)$ 等于 Q 点的值 $f(Q)$，即

$$f=f^*_{\Delta\lambda},$$

则称函数 f 在该映射下是不变的．若此函数对所有 $\Delta\lambda$ 都不变，则称它是李拉曳的．显然，一个李拉曳的函数在线汇的任意曲线上必为常值，即 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda=0$．

3.3 向量场的李拉曳

为了看出这种映射对向量场的作用，请回顾一下，任意向量场由曲线的线汇所定义，而这些曲线的切向量场正是该向量场．在图 3.2 中，我们画出了两种线汇：一种是 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$，它生成该流形的一个映射．另一种定义了任意场 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$，将受到该映射的作用．这一作用是非常简单的：μ 线汇的任意曲线映为一根新曲线，它是原来曲线上的各点在李拉曳下的象构成的新点的集合，并将参数值 μ 带到新点上去．所形成的曲线就定义了参数为 $\mu^*_{\Delta\lambda}$ 的一个新的线汇．这个新线汇的切向量场为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu^*_{\Delta\lambda}$，称为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 在李拉曳下的象．

通常，$\mu^*_{\Delta\lambda}$ 线汇与 μ 线汇是不同的．如果两者相同，则

$$d/d\mu^*_{\Delta\lambda}=d/d\mu$$

处处成立，此时我们称向量场和线汇在该映射下不变．如果它们对所有的 $\Delta\lambda$ 都不变，则我们称它们是由向量场 $d/d\lambda$ 李拉曳的．

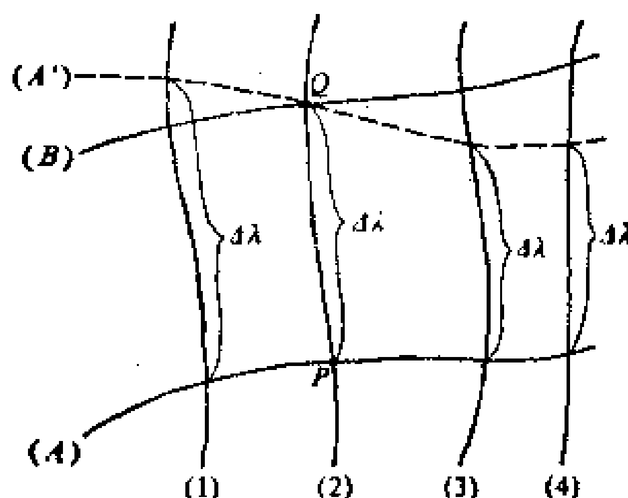


图 3.2　如何对一个向量场通过对它的路径和参数 μ 的李拉曳来定义一个新的向量场 $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$．曲线 (1)～(4) 是 λ 线汇中的曲线．曲线 $\mathcal{A}$ 是过 P 点的一根 μ 曲线，通过李拉曳一个参数距离 $\Delta\lambda$ 后映为曲线 $(\mathcal{A}')$．曲线 $(\mathcal{B})$ 是老线汇中通过 Q 的一根 μ 曲线．$(\mathcal{B})$ 在李拉曳下的象未画出．一般说来，$(\mathcal{B})$ 和 $(\mathcal{A}')$ 是不同的曲线．如果它们相同，则称 μ 线汇是李拉曳的．

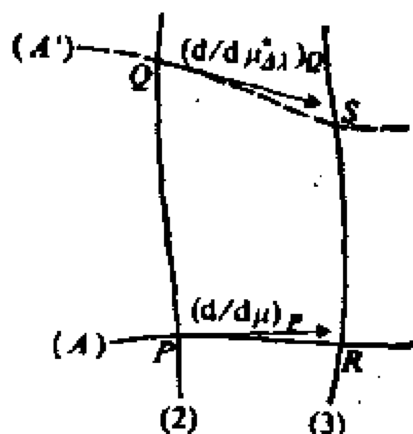


图 3.3　这是图 3.2 中的主要部分，曲线 $(\mathcal{B})$ 未画出，画出了曲线 $(\mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{A}')$ 在 P 和 Q 处的切向量．

李拉曳的向量场有一个简单的几何的解释，这如图 3.3 所示．在 $\Delta\lambda$ 无穷小和曲线(2)与曲线(3)的间隔无穷小的极限情况下，如果在 P 点的 $d/d\mu$ 在曲线$(\mathcal{A})$上刚好由 P"伸展"到 R，则显然有 $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$ 在曲线 $(\mathcal{A}')$ 上由 Q 伸展到 S．如果 $d/d\mu$ 是李拉曳的，则图 3.2 中的曲线$(\mathcal{B})$与$(\mathcal{A}')$相重合，且

$$(d/d\mu^*_{\Delta\lambda})_Q=(d/d\mu)_Q.$$

因此 $d/d\mu$ 也由 Q 伸展到 S．参考 2.14 节中对李括号的讨论，我们发现这意味着 $[d/d\lambda,\ d/d\mu]=0$，即如果向量场与拉曳场的李括号为零，即

$$[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda,\ \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]=0, \tag{3.1}$$

则该向量场是李拉曳的.

还有另一种方法来看待这一问题. 假如我们换一种眼光去看待图 3.3, 仿佛我们只给定了一根具有参数 μ 的曲线 (A), 而不是整个线汇. 于是我们从这一根曲线出发, 通过一切可能的 $\Delta\lambda$ 值, 对它进行李拉曳, 我们就可以产生整个线汇, (A') 就是其中之一. 设这场为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu_L$, 参数为 μ_L. 根据这种构造法, 求导 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 恒在 μ 固定的一根曲线上进行, 而 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu_L$ 恒在 λ 固定的一根曲线上进行. 所以它们必定是可交换的.

3.4 李导数

有了拉曳的概念就使我们能沿着线汇定义导数. 定义向量场和张量场导数的任何努力都有一个内在的困难. 考虑一下, 如果把向量场的导数定义为: 不同点的向量之间的差除以这两点之间的距离, 再取极限, 那问题之一是如何去定义点之间的"距离". 如果这两点都在一根曲线上的话, 则我们可以把这段距离取为这两点的参数值之间的差. (这就给出关于参数的导数, 而在没有度规的流形上, 能做到的就是这一点了.) 更严重的问题是对不同点的向量的比较: 不同点的两个向量"平行"与否, 在欧几里得平面中, 这是一个容易回答的简单问题. 在弯曲的曲面上, 这一问题可能没有唯一的答案. 在一个简单的可微流形上, 在不同点的平行问题甚至是没有意义的, 因为此时不存在"标志"或标尺, 用以平行地移动向量. 为了定义绝对平行, 此时必须在流形上附加其他的结构, 即所谓"仿射联络". 我们在第六章有关黎曼几何的讨论中再来研究这个问题. 在这里我们将考虑另一种方法, 它在线汇起主要作用的那些问题中是可用的. 线汇本身能代替不同点平行的概念. 也即当要比较同一曲线上

位于点 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 处的向量时，我们就可以把在 $\lambda+\Delta\lambda$ 处的向量李拉曳到点 λ 处，这就在 λ 处定义了一个新向量，从 λ 处的原来向量减去这个新向量就定义了两者之间的差。注意，这是一个唯一的差，因此由线汇给出了唯一的导数。而这种导数与线汇有关。

现在我们来求它的解析表达式。首先考察一个标量函数。求出该标量函数在点 $\lambda_0+\Delta\lambda$ 的值，把它拉曳回 λ_0，减去该标量函数在 λ_0 处的值，除以 $\Delta\lambda$，且取极限 $\Delta\lambda\to 0$。它在 $\lambda_0+\Delta\lambda$ 的值是 $f(\lambda_0+\Delta\lambda)$。通过拉曳我们定义了一个新的标量场 f^*，它的值由法则 $\mathrm{d}f^*/\mathrm{d}\lambda=0$ 定义。所以它在 λ_0 的值与它在 $\lambda_0+\Delta\lambda$ 的值是一样的，$f^*(\lambda_0)=f(\lambda_0+\Delta\lambda)$。这样定义的导数为

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f^*(\lambda_0)-f(\lambda_0)}{\Delta\lambda}=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f(\lambda_0+\Delta\lambda)-f(\lambda_0)}{\Delta\lambda}=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\right]_{\lambda_0}. \tag{3.2}$$

f 的李导数的这一结果，当然是不足为奇的。李导数算子用特别的符号 $\mathscr{L}_{\overline{V}}$ 来表示，这里 $\overline{V}$ 是生成这些映射（在我们讨论的情况中是 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$）的向量场。对于函数，我们已证明了

$$\mathscr{L}_{\overline{V}}f=\overline{V}(f)=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda. \tag{3.3}$$

现在我们对向量场 $\overline{U}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 进行同样的讨论。因为向量场是用其对函数的作用来定义的，所以我们在下面用任意函数 f 来讨论。场 $\overline{U}$ 在 λ_0 给出导数 $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0}$，而在 $\lambda_0+\Delta\lambda$ 给出 $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0+\Delta\lambda}$。在3.3节意义下拉曳 $\overline{U}(\lambda_0+\Delta\lambda)$，我们得到新场 $\overline{U}^*=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu^*$，它是由 $[\overline{U}^*,\overline{V}]=0$ 和 $\overline{U}^*(\lambda_0+\Delta\lambda)=\overline{U}(\lambda_0+\Delta\lambda)$ 来定义的。从换位子为零可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f \tag{3.4}$$

处处成立。所以，对解析向量场有

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}f\right]_{\lambda_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}f\right]_{\lambda_0+\Delta\lambda}-\Delta\lambda\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}f\right)\right]_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2)$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}f\right]_{\lambda_0+\Delta\lambda}-\Delta\lambda\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f\right)\right]_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2)$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}f\right]_{\lambda_0}+\Delta\lambda\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}f\right)\right]_{\lambda_0}$$

$$-\Delta\lambda\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f\right)\right]_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2).$$

我们把李导数 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}$ 定义为作用在 f 上,能给出

$$[\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}](f)=\lim_{\Delta\lambda\to0}\left[\frac{\bar{U}^*(\lambda_0)-\bar{U}(\lambda_0)}{\Delta\lambda}\right](f) \tag{3.5}$$

$$=\lim_{\Delta\lambda\to0}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}f\right)_{\lambda_0}-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}f\right)_{\lambda_0}\right]\Big/\Delta\lambda$$

$$=\lim_{\Delta\lambda\to0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}f-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f\right)$$

的向量场. 现在 μ^* 和 μ 的差别显然是 $\Delta\lambda$ 的一次项, 因此我们在上述最后一个等式中能用 μ 代替 μ^*. 因为这一等式对所有 f 都成立,故有

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\bar{U}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\bar{V}=[\bar{V},\bar{U}]. \tag{3.6}$$

我们再次得到一个合理的结果. 根据沿 $\bar{V}$ 的李导数的定义, 如果向量场是李拉曳的, 即它与 $\bar{V}$ 的李括号为零, 则它具有零李导数. 因此它的导线事实上就是它的李括号是讲得通的. 根据李括号的反对称性,我们有

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}=-\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}. \tag{3.7}$$

习 题 3.1

(a) 设 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 是两个任意二阶可微向量场,证明对函数和场有

$$[\mathscr{L}_{\bar{V}},\mathscr{L}_{\bar{W}}]=\mathscr{L}_{[\bar{V},\bar{W}]}. \tag{3.8}$$

(b) 证明对作用在函数和向量场上的李导数满足雅可比恒等式:

$$[[\mathscr{L}_{\bar{X}}, \mathscr{L}_{\bar{Y}}], \mathscr{L}_{\bar{Z}}]+[[\mathscr{L}_{\bar{Y}}, \mathscr{L}_{\bar{Z}}], \mathscr{L}_{\bar{X}}]+[[\mathscr{L}_{\bar{Z}}, \mathscr{L}_{\bar{X}}], \mathscr{L}_{\bar{Y}}]=0, \tag{3.9}$$

这里 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ 是任意三阶可微向量场.

(提示：在(a)中，讨论对向量的作用时，证明(3.8)式等价于(2.14)式；在(b)中，讨论对向量的作用时，应用(3.8)式以及由定义显然得出的 $\mathscr{L}_{\bar{A}}+\mathscr{L}_{\bar{B}}=\mathscr{L}_{\bar{A}+\bar{B}}$ 这一事实。)

习 题 3.2

(a) 从 $\mathscr{L}_{\bar{V}}$ 对函数和向量场的定义，推证莱布尼兹法则：

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}(f\bar{U})=(\mathscr{L}_{\bar{V}}f)\bar{U}+f\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}. \tag{3.10}$$

(b) 从(2.7)式我们知道 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}$ 在坐标基下的分量是

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U})^i=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}U^i-U^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i. \tag{2.7}$$

对向量场给定任意基 $\{\bar{e}_i\}$，由(a)证明

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U})^i=V^j\bar{e}_j(U^i)-U^j\bar{e}_j(V^i)+V^jU^k(\mathscr{L}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k)^i, \tag{3.11}$$

这里 $\bar{e}_j(U^i)$ 是函数 U^i 关于向量场 $\bar{e}_j$ 的导数.

习 题 3.3

选定一个坐标系，$\bar{V}$ 是其中一个坐标基向量，例如说是 $\partial/\partial x^1$，证明此时对于任意向量场 $\bar{W}$，有

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{W})^i=\partial W^i/\partial x^1. \tag{3.12}$$

也即李导数是偏导数的与坐标无关的形式。

3.5 一次形式的李导数

因为一次形式场和高阶张量场是用向量场和标量函数来定义的，因此我们就能从向量和标量的李导数推出一次形式的李导数. 从概念上来说，定义是相同的：如果一个一次形式在任意李拉曳向量场上的值是常数，则称此一次形式是李拉曳的. 把 $\lambda_0+\Delta\lambda$ 处的一次形式拉曳回 λ_0 处，再取其差，就可得到李导数. 其结论是，如果 $\tilde{\omega}$ 是一个一次形式，则 $\tilde{\omega}$ 沿 $\bar{V}$ 的李导数是一次

形式场 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$，它是用对所有向量场 $\overline{W}$ 成立的下列乘积法则(正如一阶导数的莱布尼兹法则)来定义的：

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}[\tilde{\omega}(\overline{W})]=(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})(\overline{W})+\tilde{\omega}(\mathscr{L}_{\bar{V}}\overline{W}). \qquad (3.13)$$

因为 $\tilde{\omega}(\overline{W})$ 仅仅是一个函数，因此(3.13)式用了已知的运算(函数和向量场的李导数)定义了 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$.

习 题 3.4

从(3.13)式及表示 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\overline{W}=[\overline{V},\overline{W}]$ 分量的(2.7)式，推证 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ 在一个坐标基中的分量是

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_i=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i+\omega_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j. \qquad (3.14)$$

把(3.13)式自然地推广到高阶张量上去，就给出李导数的下列性质：

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\mathscr{L}_{\bar{V}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B}+\mathbf{A}\otimes(\mathscr{L}_{\bar{V}}\mathbf{B}) \qquad (3.15)$$

和

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_{\bar{V}}(\mathbf{T}(\tilde{\omega},\cdots;\overline{U},\cdots))\\&\quad=(\mathscr{L}_{\bar{V}}\mathbf{T})(\tilde{\omega},\cdots;\overline{U},\cdots)+\mathbf{T}(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega},\cdots;\overline{U},\cdots)+\cdots\\&\qquad+\mathbf{T}(\tilde{\omega},\cdots;\mathscr{L}_{\bar{V}}\overline{U},\cdots)+\cdots,\end{aligned} \qquad (3.16)$$

这里 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ 是任意的张量，而 $\tilde{\omega}$ 和 $\overline{U}$ 分别是任意的一次形式和向量.

3.6 子流形

流形 M 的子流形指的是 M 的一个光滑的子集，它本身是一个流形. 如果 M 是通常的三维欧几里得空间，则通常的光滑曲面和曲线都是子流形. 在四维闵可夫斯基时空中(2.31 节)，某一特定的观察者看到的与一确定事件同时的事件(同一时间坐标 t) 构成的三维空间是一个子流形，而与一确定事件有常数

间隔 ΔS^2 的所有事件构成的双曲面也是一个子流形. 有时用"超曲面"这一名称来代替"子流形", 但是有些教材只对维数比 M 的维数小一的那些子流形才用"超曲面"这个名称.

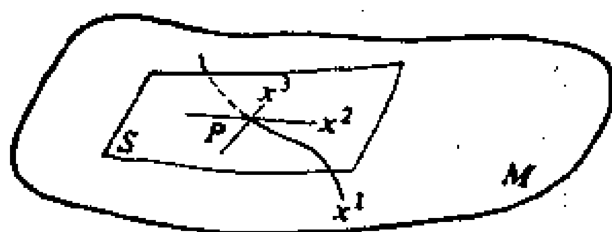


图 3.4 三维流形 M 的一个二维子流形 S 以及邻近 P 点的一个坐标, 它们符合正文中的定义. x^1 的坐标线与 S 仅相交于 P 这一点.

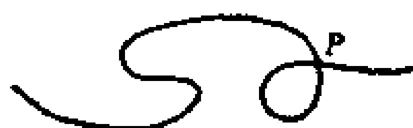


图 3.5 图中曲线是二维流形的一个一维子流形吗? 回答是: 它没有资格. 因为在 P 点上它自身相交了, 我们就不能构造必需的条件. 所以只有某些曲线才是子流形.

虽然在简单情况中, 子流形的概念是容易想象的, 但是上述定义中的"光滑"两字有更精确说明的必要. 不同的教材使用不同(且不等价的)定义. 我们将采用保证最大光滑性以及最接近我们流形定义的那个定义. n 维流形 M 的一个 m 维子流形 S 是 M 中点的一个集合, 这些点具有下列性质: 在 S 的任意点 P 的某一开邻域(M 中的)里, 存在 M 的一个坐标系, 使得 S 在该邻域中的点由 $x^1=x^2=\cdots=x^{n-m}=0$ 所表征(参见图 3.4). 一维子流形是一类曲线, 对它的光滑性的要求明示于图 3.5 中. S 的定义显然保证它本身是一个流形, 因为它有必需的坐标片(图). $m=n$ 提供了一个特殊情况: M 的任意开集合是 M 的一个子流形.

我们对子流形的兴趣主要产生于下列情况: 微分方程的解通常是一些关系, 如 $\{y_i=f_i(x^1, \cdots, x^m), i=1, \cdots, P\}$, 可以把它们想象为是一个坐标为 $\{y_1, \cdots, y_p, x^1, \cdots, x^m\}$ 的大流形的子流形(坐标为 $\{x^1, \cdots, x^m\}$). 然而, 我们将采用另一种观点来

对子流形进行研究，到第四章再把它与微分方程挂起钩来.

假定 P 是 (n 维) 流形 M 的 (m 维) 子流形 S 中的一点. S 中过 P 的一根曲线也是 M 中过 P 的一根曲线，因此，这根曲线在 P 点的一个切向量自然就是 T_P (M 中 P 点的切空间) 中的元，也是 V_P(S 中 P 点的切空间)中的元. 事实上，V_P 是 T_P 的一个 m 维向量子空间. 另一方面，T_P 中任意不在 V_P 中的向量没有到 V_P 上的唯一"投影"(请回想一下，在这里一般是没有正交概念的).

就 P 点的一次形式而言，情况正好相反. 设 T_P^* 是 T_P 的对偶，即 T_P^* 是 P 点一次形式(它们是定义在 T_P 全体上的函数)的集合. 类似地，设 V_P^* 是 V_P 的对偶，即 S 本身在 P 点的所有的一次形式. T_P^* 中的任意一次形式都定义了 V_P^* 中的一个一次形式：这只要把前者的定义域从 T_P 的全体缩小到它的子空间 V_P 上来就可以了. 但是，不是 T_P^* 中唯一的元与 V_P 中的一个给定元去对应，因为光知道一个一次形式在 V_P 上的值，还不足以使我们能说出它在不属于 V_P 的向量上的值.

现在可以小结一下了：定义在子流形 S 上的一个向量也是 M 上的一个向量，而且 M 上的一个一次形式也是 S 上的一个一次形式. 但是两个命题的逆命题都不成立. 在第四章中，我们还要再讨论一次形式和子流形，这里我们将集中讨论向量场.

3.7 弗罗比纳斯定理(向量场表述)

在 S 的任意坐标片中，存在着坐标 $\{y^a, a=1, \cdots, m\}$，以及 S 上向量场的基向量 $\{\partial/\partial y^a\}$. 所有这些基场当然是可换的，即

$$[\partial/\partial y^a, \partial/\partial y^b]=0. \qquad (3.17)$$

习 题 3.5

(a) 若 V 和 W 是 m 个彼此可换的向量场的线性组合（不必是常系数的），证明此时 V 和 W 的李括号也是这 m 个场的一个线性组合.

(b) 当上述 m 个向量场的李括号是它们自己的一个非零线性组合时，试证明同样的结果.

由习题 3.5(a) 得出：S 上的任意两个向量场有一个李括号，它也是 S 的切向量场，因为这些向量场当然是可换场 $\{\partial/\partial y^a\}$ 的线性组合. 重要的是这一论断的逆命题：设我们有定义在 M 的区域 U 中的 m 个 C^∞ 向量场的集合，其中任意两个元素的李括号都是这 m 个的线性组合，那么这些场的积分曲线紧密配合形成一个子流形族. 每个子流形的维数等于这些场在任意点定义的向量空间的维数，最大为 m，但可能比 m 小（如下面 3.9 中所述）. 只要这些场定义的向量空间的维数在 U 中是处处相等的，那么 U 中的每一点在一个且仅在一个这样的子流形上. 这些子流形布满 U 的方式很象曲线的线汇布满 U 那样（2.12 节）. 我们把它称为 U 的一个叶状结构. 每个子流形是此叶状结构中的一片叶片. 图 3.6 明示了两个这样的叶状结构.

人们把这个结果称为弗罗比纳斯定理. 我们在下一节中将简要地给出它的证明，但是容易看出它的中心思想. 如果各个场的积分曲线要确定一个子流形的话，那么它们必须保持与该子流形相切：曲线不能从子流形上“翘”出去. 如果所有这些李括号本身都是切向量场，那么这种相切性就得到了保证，因为李括号就是各向量场沿另一向量场的导数. 如果向量场的导数没有偏离该超曲面的分量的话，那么就没有积分曲线会离开该超

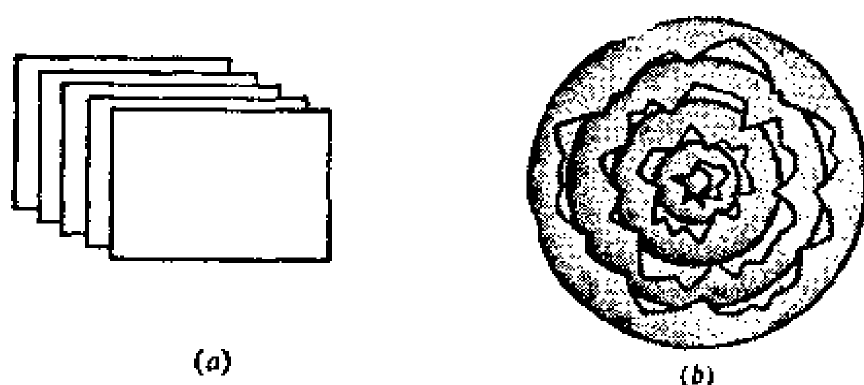


图 3.6 (*a*) 由平行平面形成的 R^3 的叶状结构. R^3 中的每一点都在属于该结构的一个平面上. 图中仅画出了几个平面. (*b*) 同心球面 S^2 形成的 R^3 的叶状结构, 中心是该叶状结构的一个退化点.

曲面. 这可参看图 3.7 给出的一些例子. 当我们在第四章中研究微分形式时, 会碰到弗罗比纳斯定理的另一种表述方式. 我们会看到它是给出偏微分方程解的存在条件的基本定理("可积条件").

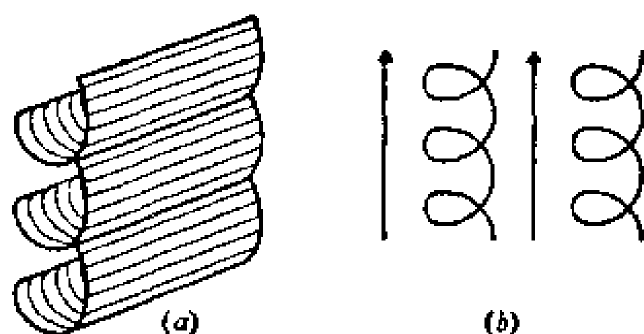


图 3.7 在 R^3 中, 向量场 $dx/d\lambda=-\sin\lambda$, $dy/d\lambda=\cos\lambda$, $dz/d\lambda=1$ 在竖直方向形成螺旋半径为 1 的螺旋形. (*a*) 螺旋场以及 x 基向量场构成一族曲面, R^3 中每一点在其中一个曲面上. 图中的波浪状 (但不扭曲) 的条带表示了这样的一个曲面. 在这一图中, 稍向 xy 平面下看, 我们有时看到该条带的一面(水平条纹), 而有时看到另一面(纵向条纹). (*b*) 不能形成子流形的两个向量场是螺旋场和 z 基向量场. 它们在任意点所定义的平面, 并不与和它上下"相邻的"螺旋曲线相切.

*3.8 弗罗比纳斯定理的证明

假定在 M 的某一开区域中给定 m' 个向量场，它们在 U' 的每一点 P 张成 T_P 的一个 $m\leqslant m'$ 维子空间．（这些子空间的全体的集合称为 M 上的一个 m 维分布．这与 2.18 节中的 δ 函数分布无关．）至少在 U' 中的任意点 P 的某一邻域 U 中，我们可以选出 m 个线性无关的场来，作为此集合的一个基．而这些场 $\{\bar{V}_{(a)},\ a=1,\ \cdots,\ m\}$（根据习题 3.5(b)）在 U 中具有如下性质：

$$[\bar{V}_{(a)},\ \bar{V}_{(b)}]=\sum_{c}\alpha_{abc}\bar{V}_{(c)}. \tag{3.18}$$

因此，事实上我们不必考虑这些场不是线性无关的那种情况，这样的一个集合，在局部上可简化为维数较小的一个线性无关集合．设流形 M 的维数为 n．

当仅有一个向量场 $\bar{V}$（即 $m=1$）时，这个定理是明显的．若 $\bar{V}(P)\neq 0$，则在 U 中积分曲线显然存在．每一根曲线都是一个一维流形，且是 M 的一个子流形．

当 $m\geqslant 2$ 时，可以用归纳法来证明此定理．由 (3.14) 式容易证明，对任意函数 f 和向量场 $\bar{V}$，有

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}(\tilde{d}f)=\tilde{d}(\mathscr{L}_{\bar{V}}f). \tag{3.19}$$

而且，(3.15)式意味着对任意向量场 $\bar{W}$，有

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}\langle\tilde{d}f,\ \bar{W}\rangle=\langle\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{d}f,\ \bar{W}\rangle+\langle\tilde{d}f,\ \mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{W}\rangle. \tag{3.20}$$

把这两个方程结合起来，并记住 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{W}=[\bar{V},\ \bar{W}]$，就可得到我们将要用到的下列结果：

$$\langle\tilde{d}f,\ [\bar{V},\ \bar{W}]\rangle=\mathscr{L}_{\bar{V}}\langle\tilde{d}f,\ \bar{W}\rangle-\langle\tilde{d}(\mathscr{L}_{\bar{V}}f),\ \bar{W}\rangle. \tag{3.21}$$

现在再回到主要的证明上来．首先我们注意到，若这 m 个向量场确实都是可换的（彼此之间的李括号都为零），则 2.15 节的构造法表明：对于它们的积分曲线上的点来说，它们定义了一

个坐标系，因此定义了我们要求的 M 的一个子流形族. 我们将证明，在一般情况下(李括号在场上线性有关)，通过从可换的原来场构造 m 个线性无关的线性组合的方法，这些子流形也是存在的. 因此假定有 m 个线性无关的向量场 $\bar{V}_{(a)}$，它们的李括号在这些场上是线性无关的. 我们选定任意一个，如 $\bar{V}_{(m)}=d/d\lambda_{(m)}$. 现在，沿着 $\bar{V}_{(m)}$ 的线汇的参数 $\lambda_{(m)}$ 是在各点有定义的一个数，所以它是 M 中我们所考察的区间 U 上的一个函数. 因此，它的梯度 $\tilde{d}\lambda_{(m)}$ 存在，且我们如下地使用它. 定义 $(m-1)$ 个向量场 $\bar{X}_{(a)}$，它们是所有原来场 $\bar{V}_{(a)}$ 的线性组合，且满足

$$\langle \tilde{d}\lambda_{(m)},\ \bar{X}_{(a)}\rangle=0,\quad a=1,\ \cdots,\ m-1. \tag{3.22}$$

这些等式确定集合 $\{\bar{X}_{(k)}\}$ 到它们自己的线性组合. 现在我们记(再一次用习题 3.5(b))

$$[\bar{X}_{(a)},\ \bar{X}_{(b)}]=\sum_{=1}^{m-1}\beta_{abc}\bar{X}_{(c)}+\gamma_{ab}\bar{V}_{(m)}, \tag{3.23}$$

$$[\bar{V}_{(m)},\ \bar{X}_{(a)}]=\sum_{b=1}^{m-1}\mu_{ab}\bar{X}_{(b)}+\nu_a\bar{V}_{(m)}, \tag{3.24}$$

这里 β_{abc}，γ_{ab}，μ_{ab} 和 ν_a 都是 U 上的函数. 把这些方程与 $\tilde{d}\lambda_m$ 缩并，并应用(3.21)式、(3.22)式和下列简单恒等式：

$$\begin{aligned}\langle \tilde{d}\lambda_m,\ \bar{V}_{(m)}\rangle&=\mathscr{L}_{\bar{V}_{(m)}}\lambda_{(m)}=d\lambda_{(m)}/d\lambda_{(m)}\\&=1\Rightarrow\tilde{d}(\mathscr{L}_{\bar{V}_{(m)}}\lambda_{(m)})=0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

于是(3.23)式和(3.24)式的左边都缩并为零，从得到的一些方程可得到 $\gamma_{ab}=\nu_a=0$. 因此，特别地，这些 $\bar{X}_{(a)}$ 的李括号根本不包含 $\bar{V}_{(m)}$. 这就是在构造它们时把(3.22)式强加上去的目的.

现在我们求助于归纳法假定：任意 $(m-1)$ 个向量场集合，如果它们有线性相关于它们的李括号，则这一集合构成一个 $(m-1)$维子流形. 把这一点用到集合 $\{\bar{X}_{(a)},\ a=1,\ \cdots,\ m-1\}$ 上去，所以我们先要假定这一集合构成一个布满 U 的 $(m-1)$维

子流形族．定义向量场的一个集合 $\{\bar{Y}_{(a)},\ a=1,\ \cdots,\ m-1\}$，它构成子流形之一，例如说 S' 的一个坐标基，因此这些场在 S' 上可换．我们将用沿 $\bar{V}_{(m)}$ 的李拉曳来定义 S' 以外的场 $\{\bar{Z}_{(a)},\ a=1,\ \cdots,\ m-1\}$：

$$\left.\begin{aligned}\bar{Z}_{(a)}=\bar{Y}_{(a)} &\quad \text{在 } S' \text{ 上}\\ [\bar{V}_{(m)},\ \bar{Z}_{(a)}]=0 &\quad \text{在 } U \text{ 中，沿过 } S' \text{ 的任意曲线 } \bar{V}_m\end{aligned}\right\}$$
$$\text{对于 } a=1,\ \cdots,\ m-1. \tag{3.26}$$

现在我们要证明的是，这些 $\bar{Z}_{(a)}$，正象它们在 S' 上彼此可换那样，它们处处彼此可换．然后，我们将构造完全可换集合 $\{\bar{V}_{(m)},\ \bar{Z}_{(a)},\ a=1,\ \cdots,\ m-1\}$，且证明该定理．但是我们必须首先确定每个 $\bar{Z}_{(a)}$ 都仍是 $\bar{V}_{(a)}$ 的一个线性组合．事实上，我们将证明它只是 $\bar{X}_{(a)}$ 的一个线性组合，并不需要 $\bar{V}_{(m)}$．每个场 $\bar{Z}_{(a)}$ 当然是唯一的，因此让我们来看一下，是否能构造一个线性组合

$$\bar{Z}_{(a)}=\sum_b \alpha_{ab}\bar{X}_{(b)}$$

以满足 (3.26)．于是，我们必须有（所有的取和都遍及 1 到 $m-1$）

$$\begin{aligned}0=[\bar{V}_{(m)},\ \bar{Z}_{(a)}]&=\mathscr{L}_{\bar{V}_{(m)}}\bar{Z}_{(a)}\\ &=\sum_b(\mathscr{L}_{\bar{V}_{(m)}}\alpha_{ab})\bar{X}_{(b)}+\sum_b\alpha_{ab}[\bar{V}_{(m)},\ \bar{X}_{(b)}]\\ &=\sum_b\frac{\mathrm{d}\alpha_{ab}}{\mathrm{d}\lambda_m}\bar{X}_{(b)}+\sum_{bc}\alpha_{ab}\mu_{bc}\bar{X}_{(c)},\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中用了 $\nu_a=0$ 时的(3.24)式．在最后的和式中把求和指标改一下($b\to c$ 和 $c\to b$)，就有

$$0=\sum_b(\mathrm{d}\alpha_{ab}/\mathrm{d}\lambda_m+\sum_c\alpha_{ac}\mu_{cb})\,\bar{X}_b.$$

因为这些 $\bar{X}_{(a)}$ 是线性无关的，这就要求

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_{ab}}{\mathrm{d}\lambda_m}+\sum_c\alpha_{ac}\mu_{cb}=0. \tag{3.28}$$

这是一个常微分方程组．在 S' 上的初始条件(α_{ab} 给出 $\bar{X}_{(b)}$ 的适当组合以构成 $\bar{V}_{(a)}$)确定了一个唯一解，这个解总是存在的．所以在每一点，$\bar{Z}_{(a)}$ 都是这些 $\bar{X}_{(b)}$ 的线性组合．

最后一步是验证李拉曳不改变下列可换关系：

$$[\bar{Z}_{(a)}, \bar{Z}_{(b)}]=0, \quad a, b=1, \cdots, m-1. \tag{3.29}$$

对 $\bar{V}_{(m)}$、$\bar{Z}_{(a)}$ 和 $\bar{Z}_{(b)}$ 这三个场应用习题 2.3 中的雅可比恒等式，就可以证明这一点．通过上述构造法，现在我们得到了 m 个彼此可换的场 $\{\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}, a=1, \cdots, m-1\}$，因此它们构成了一个 m 维子流形的一个坐标基．因为原来的场 $\{\bar{V}_{(a)}\}$ 是它们的线性组合，我们证明了这一定理．

3.9 例：S^2 的生成元

熟悉量子力学中角动量的读者可能会发现，上面给出的这许多概念已经是熟悉的．考虑球坐标的 ϕ 基向量(没有归一化)，有时也记为 $\bar{e}_\phi$：

$$\bar{e}_\phi=-y\bar{e}_x+x\bar{e}_y,$$

这里的 $\bar{e}_x$ 和 $\bar{e}_y$ 是通常的笛卡儿基向量．应用我们的符号，这就是

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},$$

我们将把这一向量记为 $\bar{l}_z$，且称为 z 方向的"角动量算子"：

$$\bar{l}_z=\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

(这一表达式与量子力学中通常的定义相差因子 $\hbar/i$．)类似地可以定义 $\bar{l}_x$ 和 $\bar{l}_y$，而且我们可以得到下列换位关系(李括号)：

$$\begin{aligned}[\bar{l}_x, \bar{l}_y]&=-\bar{l}_z,\\ [\bar{l}_y, \bar{l}_z]&=-\bar{l}_x,\\ [\bar{l}_z, \bar{l}_x]&=-\bar{l}_y.\end{aligned} \tag{3.30}$$

所以这三个向量确定了一个子流形. 然而，这似乎表示这一子流形的维数只能是3，即整个空间，这是因为有3个向量. 但是，实际上，它是二维的. 考虑到下列情况，我们就可以理解这一点了. 如果我们定义 $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，则有 $\bar{l}_x(r)=\bar{l}_y(r)=\bar{l}_z(r)=0$. 换言之

$$\tilde{d}r(\bar{l}_x)=\tilde{d}r(\bar{l}_y)=\tilde{d}r(\bar{l}_z)=0. \qquad (3.31)$$

从我们把 $\tilde{d}r$ 的图形看成是 r 为常数的曲面的集合，以及把 $\tilde{d}r$ 与例如说 $\bar{l}_x$ 的缩并，解释为 $\bar{l}_x$ 穿过这种曲面的数目，我们看到，(3.31)式意味着 $\bar{l}_x, \bar{l}_y$ 和 $\bar{l}_z$ 都与 r 为常数的球面相切. 所以，在任意点上它们是线性相关的，而且它们生成一个二维流形，自然这就是该球面.

习 题 3.6

证明当习题3.3中的 $\bar{W}$ 用任意张量场代替时，它仍是存在的.

习 题 3.7

定义算子

$$L^2=\mathscr{L}_{\bar{l}_x}\mathscr{L}_{\bar{l}_x}+\mathscr{L}_{\bar{l}_y}\mathscr{L}_{\bar{l}_y}+\mathscr{L}_{\bar{l}_z}\mathscr{L}_{\bar{l}_z}. \qquad (3.32)$$

证明 $\mathscr{L}_{\bar{l}_z}$ 和 L^2 可换. 根据对称性，由此也就能推出 L^2 与 $\mathscr{L}_{\bar{l}_x}$ 和 $\mathscr{L}_{\bar{l}_y}$ 都可换. 若 f 是一个标量函数，试证明此时有

$$L^2 f=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}, \qquad (3.33)$$

即 $L^2 f$ 是 $\nabla^2 f$ 在单位球面上的角部分，这里的 θ 和 ϕ 是通常的球坐标.

3.10 不变性

用李导数来表示张量场在某一变换下的不变性，这是它在物理学中的主要应用之一. 对于张量场 $\mathbf{T}$ 和向量场 $\bar{V}$，如果

$$\mathscr{L}_V \mathbf{T}=0, \tag{3.34}$$

那么我们称张量场 $\mathbf{T}$ 在向量场 $\bar{V}$ 下不变. 如果 $\mathbf{T}$ 具有物理上的重要性,即它可能是度规张量,或是描写粒子势能的一个标量场,或是力的向量场,那么能使 $\mathbf{T}$ 不变的那些特殊向量场,如果有的话,也将是十分重要的. 例如在上节中,我们讨论了与球面的转动相关的向量场. 我们知道,仅当所讨论的问题在与上述三个向量场(至少是其中之一)有关的转动下不变时,角动量才是重要的. 例如,若体系在某一平面中的转动下是不变的,则称体系为轴对称的(或反轴对称的),而与生成这些转动的向量相关的角动量是守恒的. 这种情况的产生将在习题5.8中讨论. 这里我们将考虑一般的不变性.

对于不变性的整个理论来说,下列定理是极为重要的. 假定 $F=\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \cdots\}$ 是张量场集合(我们是要研究其不变性的),那么使 F 中的所有场都不变的向量场 $\bar{V}$ 的全体的集合是一个李代数(李代数的定义如2.14节中所述). 这个定理的证明分成两步. 第一步由习题3.8给出,它表明,这个场的集合是实数上的一个向量空间.

习　题　3.8

如果张量 $\mathbf{T}$ 在 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 下不变,试证明此时它在 $a\bar{V}+b\bar{W}$ 下也不变,这里 a 和 b 是常数.

第二步依赖于习题3.1(a)的结果. 根据(3.13)式和(3.15)式,这一结果也能用于任意张量场. 如果 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 是此集合中的向量场,那么对于 F 中的任意张量场 $\mathbf{T}_i$ 有

$$\mathscr{L}_V \mathbf{T}_i=\mathscr{L}_W \mathbf{T}_i=0 \Rightarrow [\mathscr{L}_V, \mathscr{L}_W]\mathbf{T}_i=0 \Rightarrow \mathscr{L}_{[V,W]}\mathbf{T}_i=0. \tag{3.35}$$

所以若 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 属于此集合，则 $[\bar{V},\bar{W}]$ 也属于此集合．定理证毕．我们不久将看到，李代数与李群密切相关，而这个定理就说明了李群在物理学中的一些用处．在下几节中，我们要研究不变性的一些例子．

理解这种李代数为怎样的一种向量空间，这是重要的．我们通常把向量场 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 的线性组合 $a\bar{V}+b\bar{W}$ 认为是另一个向量场，这里 a 和 b 是流形上的函数．但是习题 3.8 所允许的线性组合是 a 和 b 为常数的情况．我们构造的向量空间把场 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 作为**单个元素**，它不是一个以 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 为其截面的纤维丛．它更象一个有限维的函数空间(参见 2.3 节)．这一点看上去可能是微妙的，但是在求向量空间的维数上却是重要的．例如，上一节中的三个向量场 $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ 和 $\bar{l}_z$ 作为 R^3 上的向量场是线性相关的，因为它们都与 S^2 相切．但是为了用其中两个表示另一个，我们必须使用一个**变系数**的线性组合．所以这三个场是此李代数的**线性无关**的元素：不存在它们的常系数(不全为零)线性组合正好等于该代数的零元素，即零向量场．所以我们说这些向量场是一个三维李代数的基．我们还遇到过的另一个李代数是一个流形或一个子流形的所有切向量场构成的代数．任意有限个这种场都不能构成基(即任意有限个场的常系数线性组合不能表示所有的元素)，因此我们说这个李代数是无限维的．

3.11 开林向量场

在物理学中，我们有兴趣的许多流形都具有度规，所以当该度规在某一向量场下不变时，就相当重要了．我们把**开林向量场** $\bar{V}$ 定义为一个满足

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}g|=0 \qquad (3.36)$$

的向量场. 可以推出在坐标系中这个方程的分量形式为(参考(3.14)式)

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\ \mathbf{g}|)_{ij}=V^k\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}+g_{ik}\frac{\partial}{\partial x^j}V^k+g_{kj}\frac{\partial}{\partial x^i}V^k=0. \tag{3.37}$$

采用在其中 $\bar{V}$ 的积分曲线就是一族坐标曲线的坐标系, 例如说 x^1 坐标, 那常常是方便的. 于是从习题 3.6, 我们有

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\ \mathbf{g}|)_{ij}=\frac{\partial}{\partial x^1}g_{ij}=0, \tag{3.38}$$

因此, 度规的分量与坐标 x^1 是无关的. 相反地, 如果存在一个坐标系, 在其中该度规的分量与某一坐标无关, 那么这个坐标的基向量是一个开林向量. 利用这种方法来识别开林向量常常是方便的.

作为一个例子, 让我们来求三维欧几里得空间的开林向量场. 该度规在笛卡儿坐标下的分量为

$$g_{ij}=\delta_{ij}, \tag{3.39}$$

它们与 x, y 和 z 是无关的. 所以 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 和 $\partial/\partial z$ 是开林向量. 同一度规在球极坐标下的分量为

$$\begin{aligned}g_{rr}&=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}=1,\\ g_{\theta\theta}&=\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}=r^2,\\ g_{\phi\phi}&=\frac{\partial}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}=r^2\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{3.40}$$

所以 $\partial/\partial\phi$ 是一个开林向量, 事实上即 $\bar{l}_z$. 显然 $\bar{l}_x$ 和 $\bar{l}_y$ 也是开林向量. 可以证明, 这 6 个开林向量就是开林向量场的李代数的一个基. 这将在第五章的 E 部分中给予证明, 在那里我们将对具有高对称性的空间进行更为详细的研究.

3.12 开林向量和粒子动力学中的守恒量

在经典力学中人们熟知的问题是，若力是一个轴对称势的梯度，那么粒子关于此对称轴的角动量在粒子的轨道上是常数．类似地，如果该势与笛卡儿坐标之一，例如说 x 无关，那么动量的 x 分量是守恒的．然而，往往并不讨论以下情况：势具有某种其他类型的对称性（例如说在相似的椭球族上是常值的），但并没有与此对称性相关的守恒动量．也即粒子动力学中的守恒量并不单单由势在某一运动（在上面三个例子中，它们分别是圆、直线和椭圆）下的不变性而推得，而且还需要该运动沿着欧几里得空间中（动力学在其中发生）的开林向量场．虽然我们现在还没有足够的数学手段去证明这一断言（推迟到习题 5.8 中进行），但是从运动方程可以看出这种说法的合理性．用通常的向量运算的符号，运动方程是

$$m\dot{V} = -\nabla\Phi, \quad 或 \quad m\dot{V}^i = -\nabla^i\Phi. \tag{3.41}$$

但是我们知道，向量梯度与度规有关，我们实际上知道

$$m\dot{V}^i = -g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi. \tag{3.42}$$

从这一方程得出的任意不变量，显然不仅必定与 Φ 的不变性有关，而且还与 **g** 的不变性有关．

*3.13 轴对称

为了说明李导数是如何自然地进入对称性问题的，我们考虑轴对称的情况．轴对称是关于某一固定轴的转动下的不变性．（不要与柱对称混淆，柱对称是轴对称加上沿对称轴的平移不变性．）设用 ϕ 表示绕该轴的转动．经常会有这样一种情况：所讨论的问题具有某种作为“背景”的轴对称性．例如，我们讨论在

轴对称势中运动的粒子，或一个含有小微扰的轴对称体系. 在这种情况中，我们得到关于未知量 ψ 的一个线性方程：

$$L(\psi)=0, \tag{3.43}$$

这里 L 是某一算符，它与坐标变换 $\phi\to\phi+$常数无关. (3.43)式的解不必是轴对称的：在某一时刻，粒子位于某一角度，过后它在另一角度，或者微扰有非轴对称的初始值. 但是标量解确实有很好的性质：当对 ϕ 傅里叶分解时

$$\psi(\phi, x^j)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi_m(x^j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \tag{3.44}$$

函数 $\psi_m(x^j)$（指标取遍除 ϕ 外的所有坐标），满足下列相关的微分方程：

$$0=L_m(\psi_m)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}L(\psi_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}). \tag{3.45}$$

算子 L 和 L_m 通常是不恒等的，因为 L 可以包含关于 ϕ 的导数，但 L_m 不行，例如，算子

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},$$

它显然在 $\phi\to\phi+$常数的变换下是不变的. 于是当它作用于函数 $f(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ 上时，有

$$\nabla^2(f(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}\right\}f(r,\theta). \tag{3.46}$$

大括号中的算子，如 (3.45) 式中所定义的，是 ∇^2_m. 函数 f 的这个傅里叶分解，在粒子运动的情况中通常是没有用的，此时粒子的位置是 ϕ 的一个 δ 函数. 但是对于连续系统，例如对于在轴对称背景上的波来说，它却是非常有用的. 关键的函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ 可以称为标量轴谐函数. 对(3.43)式的解 ψ，若

$$\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}\psi=\mathrm{i}m\psi, \tag{3.47}$$

则称它有轴本征值 m，这里 $\bar{e}_\phi=\partial/\partial\phi$ 与对称圆相切．如果 ψ 是标量函数，这是不难的．但如讨论的是一个向量方程，例如电磁学中的矢势，此时轴谐函数仍是有用的，但是它们应是向量轴谐函数．我们来构造它们．

考虑 $\phi=0$ 的子流形（实际上这是一个有边界的子流形，边界在对称轴上）．在每一点上，对与这一子流形相切的向量选一个基 $\{\bar{e}_j\}$，在这个基中添加 $\bar{e}_\phi$，使得 $\{\bar{e}_\phi, \bar{e}_j\}$ 是原流形在子流形的点处的所有切向量的基．现在通过沿 $\bar{e}_\phi$ 围绕对称轴的各种路线来李拉曳这个基（如图 3.8 所示），以构成整个流形的一个基．最后得到的场都满足

$$\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}\bar{e}_j=0, \tag{3.48}$$

即它们都是轴对称的．注意，用通常的笛卡儿坐标表示，$\bar{e}_j$ 的分量当绕轴转动时要改变．向量场的轴对称性并不意味着它的笛卡儿分量是与 ϕ 无关的，而是指在包括 ϕ 的一个坐标系中，它的分量是与 ϕ 无关的．

根据(3.48)式，现在我们有一个具有轴本征值为 0 的基．显然，具有轴本征值为 m 的基为

$$\bar{e}_{(m)j}=\bar{e}_j e^{im\phi},\quad \bar{e}_{(m)\phi}=\bar{e}_\phi e^{im\phi}. \tag{3.49}$$

满足

$$\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}\bar{V}=im\bar{V}$$

的任意向量场，都可表示为由 (3.49) 式给出的本征值为 m 的向量轴谐函数的一个线性组合，而系数与 ϕ 无关．

***习 题 3.9**

在三维欧几里得空间中，通过把 $\phi=0$ 平面中的基选为 $\{\bar{e}_x, \bar{e}_z\}$ 来构造绕 z 轴转动的轴向量谐函数．在 $m=2$ 时，试求这三个向量谐函数的笛卡儿分量．用类似的方法，在 $m=2$ 时，从 $\phi=0$ 平面中的 $\{\tilde{d}x, \tilde{d}z\}$ 出发，试求向量谐函数的基一次形式．如果 f 是轴本征值为 2 的标量函数，试证梯度 $\tilde{d}f$ 是轴本征值为 2 的一次形式．证明 $\bar{e}_x\pm i\bar{e}_y$ 的轴本征值为 ±1．

虽然我们尚未发展这里所述的内容与群论之间的关系，但显然两者有密切的联系．轴对称性的存在，意味着作为物理情况的“背景”在沿 $\partial/\partial\phi$ 的李拉曳下是不变的．正如 3.1 节中所述，这些拉曳构成一个李群．这里涉及到的 $SO(2)$ 群是特别简单的．转动群（与它相关的对称性称为球对称性）是更重要的例子．但因为沿 $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ 和 $\bar{l}_z$ 的各个李导数不可换，所以更为复杂．只有对李群本身系统地加以研究，才能处理这一问题．在本章的下面各节中，我们将研究李群．

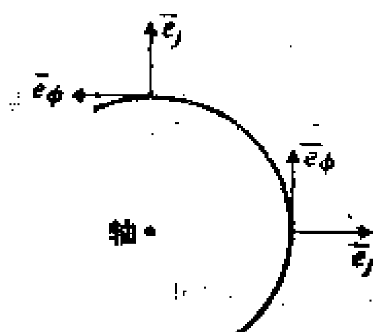


图 3.8　从对称轴往下看基 $\{\bar{e}_\phi, \bar{e}_j\}$，它由沿 $\bar{e}_\phi$ 的李拉曳构成．

3.14　抽象李群

李群和李代数，我们已经多次接触过了，现在我们来更系统地研究它们．正如我们已看到的，在物理学中人们对它们感兴趣的主要原因是，它们能表示一些重要张量的不变性质．在下面的几节中，我们将研究这一方面的内容．在这一节中，我们研究群流形本身．要注意下列千万不能混淆的重要区别：张量的不变性由群描述，而群流形不同于张量所在的流形．所有转动（$SO(3)$）的流形不同于流形 E^3，而后者的坐标系正是经受了这些转动．

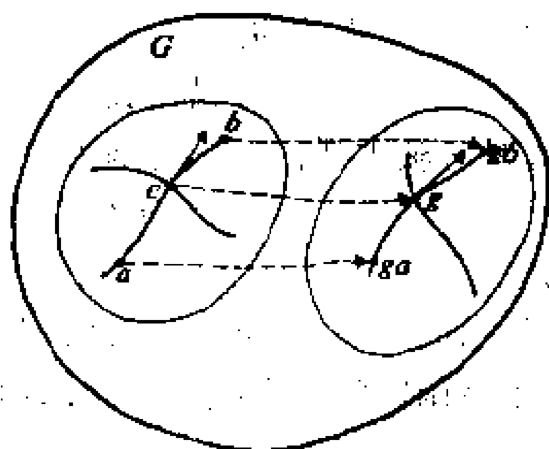


图 3.9　由 g 给出的左平移，把 e 的一个邻域映到 g 的一个邻域上．e 点的一个向量能自然地映为 g 点的一个向量．

设我们有一个有限维的李群，即一个 n 维 C^∞ 流形 G，它有下列 C^∞ 映射（微分同胚）：G 中任意元素 g 给出了映射 $h\mapsto gh$（g 给出的左平移）或 $h\mapsto hg$（g 给出的右平移）．我们用 e 来表示单位元，同时并不假定此群是阿贝尔的（即一般有 $hg\neq gh$）．如图 3.9 所示，e 的任意邻域通过由一特定 g 给出的左平移映到 g 的一个邻域上．因为这一映射将曲线映为曲线，它就把 e 点的切向量（T_e 中的元素）映为 g 点的切向量．这是一个称为 $L_g:T_e\to T_g$ 的映射，这也已明示在图 3.9 中了．（这一概念与 3.3 节中的李拉曳映射的概念是一样的）．如果对一切 g，L_g 把向量场 $\bar{V}$ 在 e 点的向量映为 $\bar{V}$ 在 g 点的向量（即 L_g：$\bar{V}(e)\mapsto\bar{V}(g)$），则称 G 上的向量场 $\bar{V}$ 为左不变的．由群的合成法则可知，对 G 中的任意 h，L_g 将 $\bar{V}(h)$ 映为 $\bar{V}(gh)$．因而我们有了一个 G 上"常值"向量场的自然定义．同样显然的是，T_e 中每一个向量都定义了一个唯一的左不变向量场．因此左不变向量场构成一个 n 维向量空间．（如 3.10 节所述，这些场的线性组合是用常数进行的，而不用 G 上的函数．）事实上容易看出（图 3.10），若 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 是任意两个左不变向量场，则 L_g 把 $[\bar{V},\bar{W}]$ 在 e 点的向量映为 $[\bar{V},\bar{W}]$ 在 g 点的向量，故场 $[\bar{V},\bar{W}]$ 也是左不变的．（对图 3.10 给出的说明并不信服的读者，请应用 G 上的坐标来证明这一结果．）这是重要的，因为这意味着左不变向量场构成一个李代数．这个李代数称为 G 的李代数，记作 $\mathfrak{L}(G)$（有些作者采用符号 $\mathfrak{g}$）．这个李代数由下面定义的构造常数完全表征．设 $\{\bar{V}_{(i)}, i=1,\cdots,n\}$ 是该李代数的一个基，即左不变向量场的一个极大线性无关集合．（如果它们在一点，例如说 e 点线性无关，那么上述映射表明它们处处无关．）于是我们恒有

$$[\bar{V}_{(k)},\bar{V}_{(l)}]=c^{j}_{kl}\bar{V}_{(j)},\tag{3.50}$$

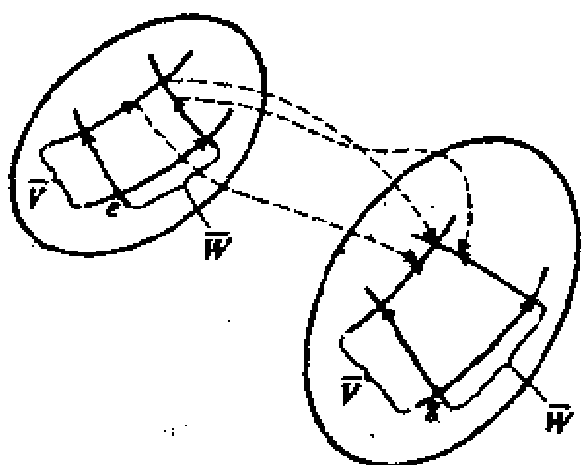


图 3.10　图 2.21 所示的映射用于左不变向量场. 因为它们是左不变的, 邻近 e 的参数距离为 ϵ 的平移映为邻近 g 的同样的平移, 所以 e 邻近处表示它们的李括号的"缺口"映为 g 邻近处的"缺口", 后者是被平移场的李括号.

其中用了求和规定. 如果构造常数全都为零, 则称此李代数是阿贝尔的. 我们将看到, 这就意味着 G 也是阿贝尔的. 当然基 $\{\bar{V}_{(k)}\}$ 不是唯一的, 而且在基改变时, 数 c^i_{kl} 象一个 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 型张量的分量那样变换. 每一个李群和李代数都有一个唯一的"构造张量" **C**. 稍加一些限制, 便能得到这一陈述的逆, 即给定构造常数集, "几乎"能确定一个李群, 其李代数的构造常数就是所给的. 这将在 3.16 节中讨论.

考察过 e 的左不变向量场 $\bar{V}$ 的积分曲线. 它在 e 有唯一的切向量 $\bar{V}_e$, 并且有唯一的参数 t, 对此参数来说, $t=0$ 对应于 e. 正如 2.13 节中所述, 曲线上的点可以用 $\bar{V}$ 的指数映射 $\exp(t\bar{V})$ 来定位. 又如 3.1 节中所讨论的, 这正好包含着由 $\bar{V}$ 生成的 G 到其自身上的微分同胚. 不象一般的向量场, $\bar{V}$ 完全由 $\bar{V}_e$ 确定, 因此我们把 G 在此曲线上的点用

$$g_{\bar{V}_e}(t)=\exp(t\bar{V})|_e \tag{3.51}$$

来表示. 因为根据定义, 指数映射具有下列性质:

$$\exp(t_2\bar{V})\exp(t_1\bar{V})|_e=\exp[(t_1+t_2)\bar{V}]|_e,$$

所以在这些积分曲线上的点构成一个群：

$$\begin{aligned}g_{V_e}(t_1+t_2)&=\exp[(t_1+t_2)\bar{V}]|_e\\&=\exp(t_2\bar{V})\exp(t_1\bar{V})|_e\\&=g_{V_e}(t_2)g_{V_e}(t_1).\end{aligned}\tag{3.52}$$

这个群称为 G 的单参数子群，它显然是阿贝尔的，即

$$g_{V_e}(t_1+t_2)=g_{V_e}(t_2+t_1).$$

这很简单，因为群运算相当于参数值的相加. 对应于 T_e 中的每一个向量，都有唯一的一个子群. 而且，因为每一个单参数子群都是 G 中通过 e（子群总包含单位元素）的一根 C^∞ 曲线，所以在 G 的单参数子群与 G 的李代数元素之间就有一个一一对应.

*习　题　3.10

试定义右不变向量场. 证明它们构成一个李代数. 证明它们的通过 e 的积分曲线与左不变场的那些积分曲线重合. 证明它们通过其他元素的积分曲线与左不变向量场的那些积分曲线一般是不重合的，除非该群是阿贝尔群两者才重合.

*习　题　3.11

(a) 证明 T_e 的任意基 $\{\bar{V}_i(e),\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 定义了左不变向量场的一个线性无关集合，记作 $\{\bar{V}_i\}$.

(b) 考察群 G 的切丛 TG. 在 e 的某一邻域 U 中取下述坐标. 设 $\bar{X}$ 是 U 中 g 点的一个向量，$\bar{X}=\sum_i \alpha_i \bar{V}_i(g)$. g 点的纤维正是 R^n，因此取 $\bar{X}$ 的坐标为 $\{\alpha_i\}$. 于是设 U 上 TG 的坐标为 $\{\{g$ 的坐标$\},\{\alpha_i\}\}$. 证明把这一规定扩展到整个 TG 上去，能验证 TG 有一个到 $G\times R^n$ 上的1-1映射，即李群的切丛是平凡的.

3.15　李群的例子

(i) 最简单的例子是 R^n，它是一个流形. 而且在向量加法

下它是一个群，这是一个阿贝尔群．单参数子群是“射线”（过原点的直线）．左不变向量场平行于射线，它们都可换．因此它的李代数是具有平凡阿贝尔括号（对于 T_e 中所有的 $\overline{V}$ 和 $\overline{W}$，有 $[\overline{V}, \overline{W}]=0$）的向量空间 T_e．

(ii) 对于物理学来说，最重要的李群之一是行列式不为零的 $n\times n$ 实矩阵全体构成的群．它的名称是 n（实）维一般线性群，记作 $GL(n, \mathrm{R})$．如下所述，它是一个李群．首先，关于矩阵的乘法运算它是一个群，而单位矩阵是单位元．（为了保证群中的任意矩阵都有逆元，行列式不为零的限制是必要的．）其次，因为它是一个流形．$GL(n, \mathrm{R})$ 中矩阵元为 $\{a^i_j,\ i, j=1, \cdots, n\}$ 的任意矩阵 A，有一个半径为 ϵ 的邻域，其中的矩阵 B 定义为对于所有 i 和 j 满足 $|b^i_j-a^i_j|<\epsilon$ 的矩阵，而 ϵ 可以选得足够小，使得每一个 B 的行列式都不为零．数 $x^i_j=b^i_j-a^i_j$ 是此邻域的坐标，而且因为有 n^2 个坐标是独立的，所以 $GL(n, \mathrm{R})$ 的维数是 n^2．事实上，它是 R^{n^2} 的一个子流形．因为象任意 R^m 一样，R^{n^2} 与它每一点的切空间是全同的，所以 $GL(n, \mathrm{R})$ 的单位元 e 的切空间就是 R^{n^2}，而且任意切向量都可以用矩阵表示．例如，$GL(n, \mathrm{R})$ 中包含矩阵 $\mathrm{diag}(1+\exp(\lambda), 1, 1, \cdots, 1)$ 的曲线（参数为 λ），在 $\lambda=0$ 时有切向量 $\mathrm{diag}(1, 0, 0, \cdots, 0)$．这一矩阵的行列式为零，这说明了下列事实：任意矩阵都在 T_e 之中，因而任意矩阵都生成一个单参数子群，即一个左不变向量场[†]，以及李代数的一个元素．

任意矩阵 A 生成的单参数子群，是过 e 点的，且在 e 点给出 A 的左不变向量场的积分曲线．如果我们用 $g_A(t)$ 标记这些矩阵，且 $\mathrm{d}g_A(t)/\mathrm{d}t|_0=A$（这就是指，对于所有 i, j，有 $\mathrm{d}(g_A)^i_j/\mathrm{d}t|_0$

† 读者应该记住，G 的一个切向量事实上是一个矩阵（方阵），不要与“列向量”混淆，后者在这里并不起作用．

$=a^t_j$). 于是根据(3.52)式,就有

$$g_A(t+\Delta t)=g_A(t)g_A(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}g_A(t)/\mathrm{d}t=g_A(t)A \tag{3.53}$$

$$\Rightarrow g_A(t)=\exp(tA) \tag{3.54}$$

$$=1+tA+\frac{1}{2!}t^2A^2+\frac{1}{3!}t^3A^3+\cdots. \tag{3.55}$$

(3.55)式是矩阵指数映射的定义,它与(3.54)式一起具体地给出形式表达式(3.51). 因此$GL(n, \mathrm{R})$的单参数子群是任意$n\times n$矩阵的指数映射. 物理学家通常称矩阵A为子群$g_A(t)$的无穷小生成元. 我们在习题 3.12 中讨论$\exp(tA)$的性质.

习 题 3.12

(a) 证明(3.55)式满足(3.53)式.

(b) 证明(3.55)式能推出

$$\exp(B^{-1}AB)=B^{-1}\exp(A)B. \tag{3.56}$$

(c) 对任意实矩阵A, 可以证明(参见 Hirsch & Smale, 1974)能找到一个实矩阵B, 使得$B^{-1}AB$为下列标准型(称为分块对角型,因为非零元素位于沿主对角线的方块之中):

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

这里每一个P_j是一个方阵,它具有下列形式之一:

(i) P_j是1×1矩阵

$$(\lambda_j), \tag{3.58a}$$

或(ii) P_j是2×2非对角矩阵

$$\begin{pmatrix} r_j & s_j \\ -s_j & r_j \end{pmatrix}, \tag{3.58b}$$

或(iii) P_j是$n_j\times n_j$非对角矩阵 ($n_j\geqslant 2$)

$$\begin{pmatrix} \mu_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \mu_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \mu_j \end{pmatrix}. \tag{3.58c}$$

而且，数 λ_j, μ_j 和 $r_j \pm is_j$ 都是 A 的本征值. 由此及（3.55）式证明 $\exp(tB^{-1}AB)$ 类似地也为分块对角型，而相应的分块如下：

（i） $(e^{t\lambda_j})$, (3.59a)

（ii） $e^{tr_j}\begin{pmatrix} \cos ts_j & \sin ts_j \\ -\sin ts_j & \cos ts_j \end{pmatrix}$, (3.59b)

$$\text{(iii)}\quad e^{t\mu_j}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.59c}$$

由(a)得出：在情况(i)和(ii)中，使 A 变成标准型的矩阵 B，也使 $\exp(tA)$ 变成标准型；而在情况(iii)中，构成标准型的变换是 t 的函数.

注意，并非 $GL(n, \mathrm{R})$ 中的每一个元素都是一个单参数子群的元素. 一个原因是，这种子群是 $GL(n, \mathrm{R})$ 中的一根连续曲线，所以在这曲线上行列式必须是连续变化的. 因为在 e 点，行列式为 1 而不是零，所以不存在连续曲线把 e 与一个行列式为负值的矩阵相连.（读者容易看出，(3.59)式所表示的矩阵都具有正行列式值.）这是不连通群的例子，而且说明李群所具有的有趣的整体性质. 单单研究李群的单参数子群，或者甚至它的李代数，通常不足以把握李群的所有情况. 能通过一根连续路径与 e 相连的那些元素(不必是一个单参数子群)，称为该群的单位元分支.

习 题 3.13

证明矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是 $GL(2, \mathrm{R})$ 的单位元分支中的元素，但是不在任意一个单参数子群中.
$\left(\text{提示：构造一条连接它与 } e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{的连续路径.}\right)$

$GL(n, \mathrm{R})$ 的李代数是什么？给定 e 点的一个切向量 $\overline{A}_e$ 及它的单参数子群 $g_{\overline{A}_e}(t)$. 用 $GL(n, \mathrm{R})$ 的任意矩阵 f 来得到此曲线的左平移 $fg_{\overline{A}_e}(t)$. 这样就产生对应于 $\overline{A}_e$ 的一个左不变向量场的线汇中的一根曲线，如图 3.11 所示. 这就是如何用 $\overline{A}_e$ 来产生它的左不变场的，我们用 $\overline{A}$ 简记这个场. 如果 f 事实上是在由 T_e 中任意矩阵 $\overline{B}_e$ 产生的通过 e 的 $g_{\overline{B}_e}(t)$ 上，那么这两个向量场的李括号在 e 点的值，根据(2.12)式正是

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}[g_{\overline{A}_e}(t)g_{\overline{B}_e}(t) - g_{\overline{B}_e}(t)g_{\overline{A}_e}(t)],$$

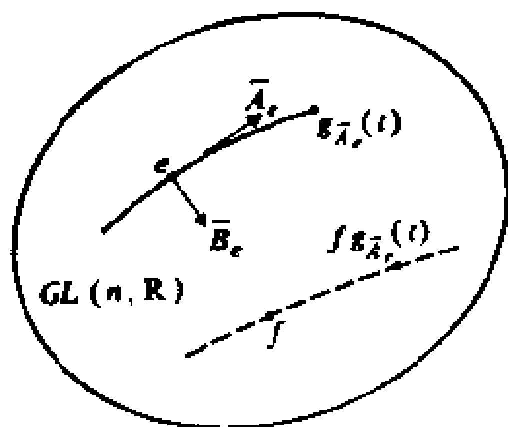


图 3.11 f 给出的 $g_{\overline{A}_e}(t)$ 的左平移.

利用 (3.55) 式容易求得它为

$$[\overline{A}, \overline{B}]\,|_e = \overline{A}_e\overline{B}_e - \overline{B}_e\overline{A}_e. \tag{3.60}$$

也即 $GL(n, \mathrm{R})$ 中任意两个左不变向量场的李括号在 e 点的值，正好是产生这两个场的两个矩阵的通常矩阵换位子. 由这个换位子生成的左不变向量场是李代数 $\mathfrak{L}(GL(n, \mathrm{R}))$ 中的元素，它是原来场的括号.

(iii) 我们已经看到转动群是李群(2.3 节(vi)). 以后将对它仔细地研究，但在这里把它作为 $GL(n, \mathrm{R})$ 的一个子群来考察. 在 2.29 节中，我们看到满足 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$ 的矩阵 A 是欧几里得对称性群 $O(n)$ 的元素.（符号 $O(n)$ 表示 n 维正交群.）因为任意矩阵的行列式符合下列法则(1.6 节):

$$\det(A)=1/\det(A^{-1}),\ \det(A)=\det(A^{\mathrm{T}}), \qquad (3.61)$$

所以 $O(n)$ 中的矩阵的行列式为 ± 1. 行列式为 $+1$ 的那些元素构成一个称为 $SO(n)$ 的子群(特殊正交群)，而我们将要说明它就是转动群.（$O(n)$ 中那些行列式为 -1 的矩阵并不构成一个子群，因为单位元不在其中. 象 $GL(n, \mathrm{R})$ 一样，$O(n)$ 也是不连通的.）

习　题　3.14

(a) 若 A 在 $O(n)$ 中，证明它的本征值与 A^{-1} 的本征值一样.（应用对于任意 B, $\det B=\det B^{\mathrm{T}}$ 这一事实.）对于本征值并不熟悉的读者应查阅一下 1.6 节中的定义.

(b) 对于任意非奇异矩阵 A, 证明 A 的本征值是 A^{-1} 本征值的倒数.（应用 $\det(AB)=\det A\det B$ 这一事实.）对 $O(n)$ 中 A 的本征值 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，试论证有下列两种类型: 或为 (i) $\lambda_j=\pm 1$, 或为 (ii) $\lambda_j\lambda_k=1$ (对于 $j\neq k$). 证明情况(ii)意味着本征值成对出现($e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$)，这里 θ 是实数.

(c) 还能证明: $O(n)$ 中的矩阵 A 的标准型可以通过变换 $B^{-1}AB$ 来达到，这里 B 是 $SO(n)$ 中的一个矩阵. 应用这一点来导出下列结论: $O(n)$ 中的矩阵有由下列分块构成的标准型

(i) (1), $\qquad (3.62\mathrm{a})$

或 (ii) (-1), $\qquad (3.62\mathrm{b})$

或 (iii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $\qquad (3.62\mathrm{c})$

(d) 证明 $O(n)$ 的李代数由所有的反对称矩阵构成. 由此证明 $O(n)$

的维数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$.

现在，$GL(n, \mathrm{R})$中的一个矩阵 A 可以看成是 R^n 上的一个可逆$\binom{1}{1}$型张量. 它把 R^n 的一个列向量 $\bar{V}$，通过矩阵乘法映为 $A\bar{V}$. 当基$\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$变为$\{B^{-1}\bar{e}_1, \cdots, B^{-1}\bar{e}_n\}$时，变换 $B^{-1}AB$ 只不过是该张量的分量的变换（2.26节）. 因此我们可采用下列观点：$SO(n)$ 的任意矩阵等价于独立的二维平面中的一系列转动，因为标准型（3.62c）式显然是这样的，而标准型（3.62b）式必须出现偶数次（为了使行列式为正值）. 而把这些方向配成对，便能给出 $\theta=\pi$ 时的（3.62c）式. 因此 $SO(n)$ 确实是转动群.（注意，若 n 是奇数，$SO(n)$ 中每一个矩阵都至少固定一个方向.）$O(n)$ 中的另一些矩阵可以解释为反演，这是一种改变 n 个线性无关向量的任意集合的"手征性"的变换. 下面的习题就是讨论这一点的.（基的"手征性"将在第四章中详细讨论.）

习　题　3.15

证明：在 $O(n)$ 中但不在 $SO(n)$ 中的元素的标准型，是矩阵 diag$(1, \cdots, 1, -1, 1, \cdots, 1)$（在它的对角线上只有一个 -1）与 $SO(n)$ 中一个矩阵的标准型的乘积. 由此证明它是一个反演.

习　题　3.16

证明 $SO(n)$ 中的任意矩阵都在一个单参数子群之中. 证明 $SO(3)$ 中的任意矩阵等价于绕某一轴的有限角 θ 的转动.

在结束对转动群的讨论之前，我们要研究它的李代数，至少要研究 $SO(3)$ 的李代数. 此时向量空间 T_e 由所有的斜对称矩

阵构成，它的维数是 3(参见习题 3.14(d))．下列矩阵：

$$L_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$L_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.63}$$

构成它的一个基．

习 题 3.17

证明上述李代数具有下列括号：

$$[L_1,\ L_2]=L_3,\ [L_2,\ L_3]=L_1,\ [L_3,\ L_1]=L_2. \tag{3.64}$$

不久我们将回到习题 3.17 这个代数上来．

(iv) 物理学中另一个有兴趣的矩阵群是 n 维特殊酉群，记作 $SU(n)$．它是行列式不为零的所有复 $n\times n$ 矩阵群(称为 n 维复空间中的一般线性群，记作 $GL(n,\ C)$) 的一个子群．因为每一个矩阵元可以是复值的，而每一个复数由两个实数确定，所以 $GL(n,\ C)$ 是 $2n^2$ (实)维的．酉群 $U(n)$ 是它的子群，U 中每一个元都满足 $U^{-1}=U^*$，这里"$*$"表示复共轭转置(厄密共轭)．类似于 $O(n)$，它的李代数由 $n\times n$ 反厄密矩阵的全体所构成．(若 $A^*=-A$，则矩阵 A 是反厄密的．)它的维数为实 n^2 维，因为这样的一个矩阵可有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个任意的非对角复元素（由 $n(n-1)$ 个实数给出）及 n 个任意的纯虚对角元(由 n 个实数给出，所以一共有 n^2 个)．$U(n)$ 的子群 $SU(n)$ 是 $U(n)$ 中所有行列式为 1 的矩阵的集合．因为 $U(n)$ 中任意元的行列式都是实数，这就附加了一个条件，因此 $SU(n)$ 的维数是 n^2-1．它的

李代数是所有零迹的反厄密矩阵的集合.（A 的迹指的是和 a^i_i，参见 1.6 节.）

习　题　3.18

证明 $SU(n)$ 的李代数是由所有反厄密零迹矩阵构成的李代数. 可应用下列事实: $U(n)$的任意元素具有标准型 $\mathrm{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \cdots, e^{i\phi_n})$，这里数 $\{\phi_j, j=1, \cdots, n\}$ 都是实数.

习　题　3.19

(a) 证明下列矩阵是 $SU(2)$的 T_e 的一个基:

$$J_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad J_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

证明这是一个三维实向量空间，尽管这些矩阵可能有虚数元素，但是在 $SU(2)$的向量空间 T_e 之中的只是它们的实系数线性组合.

(b) 证明这一李代数具有下列括号:

$$[J_1, J_2]=J_3,\ [J_2, J_3]=J_1,\ [J_3, J_1]=J_2. \tag{3.66}$$

它们在形式上等同于 (3.64) 式，而且我们将在下一节中看到，这意味着在 $SU(2)$和 $SO(3)$之间有一个密切的关系.

*习　题　3.20

(a) 设 $\mathrm{tr}(A)=a^i_i$ 表示任意矩阵的迹. 证明 $\mathrm{tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{tr}(A)$.

(b) 利用 (a) 以及 (i) 矩阵的行列式满足法则

$$\det(AB)=\det(A)\det(B),$$

(ii) (3.56) 式的结果，(iii) 标准型 (3.55～3.59) 式，试证明对任意矩阵 A，有

$$\det(\exp(A))=\exp(\mathrm{tr}(A)). \tag{3.67}$$

(c) 试利用上式给出习题 3.18 的一个较简单的证明.

*3.16　李代数和它的群

每一个李群 G 都有它的李代数 $(\mathfrak{G})$. 因为 G 的每一个元

素 g 是 g 生成的左平移下 e 的象，而且因为 T_e 中的每一个向量对应于该李代数中的一个唯一的向量场，所以由此推得：G 的每一点 g 都在每一个左不变线汇中的一根曲线上. 然而，是否能完全从 G 的李代数出发来构成群 G 呢？回答是这部分是正确的. 但是为了表述它，我们首先必须对李代数给出一个更好的定义，以代替目前所用的那个定义.

李代数是一个实向量空间 V，在其中定义了一个双线性乘法法则，记作[,]，它对任意两个向量 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$，给出另一个向量 $[\bar{A}, \bar{B}]$，并满足

(i) $[\bar{A}, \bar{B}] = -[\bar{B}, \bar{A}]$, (3.68)

(ii) $[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] + [\bar{B}, [\bar{C}, \bar{A}]] + [\bar{C}, [\bar{A}, \bar{B}]] = 0.$ (3.69)

这一定义与 2.14 节中给出的定义之间的关键性差别在于，这里的李括号是形式地加以定义的，即用性质(i)和(ii)来定义的. 因此，任意用这种方式结合向量的法则都是可以的. 向量场的换位子给出了这种法则的一个例子，这是一直用到现在的仅有的一个. 但是带有通常叉积的向量空间 R^3 显然是另一个例子：

$$[\bar{a}, \bar{b}] \equiv \bar{a} \times \bar{b}. \tag{3.70}$$

***习 题 3.21**

(a) 证明(3.70)式满足雅可比恒等式(3.69).

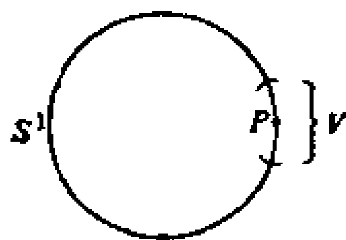
(b) 证明基 $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ 具有括号

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_3, \quad [\bar{e}_2, \bar{e}_3] = \bar{e}_1, \quad [\bar{e}_3, \bar{e}_1] = \bar{e}_2, \tag{3.71}$$

并将此结果与(3.64)式和(3.66)式比较.

我们现在不加证明地叙述一个对于物理学来说是极为重要的定理. 每一个李代数背后都有一个群. 精确地说，每一个李代数是一个且仅是一个单连通李群的李代数.（如果流形上每一

根闭曲线都可以光滑地收缩成一点，则称该流形是单连通的．关于本定理的讨论及部分证明，可参见 Spivak (1970)和 Warner (1971)．）再者，有同一李代数的任意其他不是单连通的李群都可以用上述单连通李群覆盖．（如果从连通流形 M 到另一个流形 N 上有一个映射 π，使得 N 的任意点的某一邻域 V 的逆象是 M 中 $\pi^{-1}(P)$ 点的开邻域的不相交的并集，则称 M 覆盖 N．在图 3.12 中给出了一个例子．）此覆盖映射必定是这两个群之间的一个同态．（同态的定义请参见 1.4 节．）



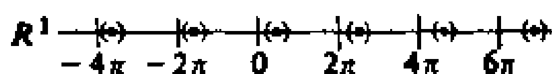


图 3.12　通过映射 $\pi: R^1 \to S^1$，实数轴 R^1 无限次覆盖单位圆 S^1．这一映射把 x 映为 S^1 上的点，该点在平面 R^2 上的坐标为 $\pi(x)=(\cos x, \sin x)$．集合 $\pi^{-1}(V)$ 是 R 上所示的所有开区间的并集．

群 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 是说明这一定理的很好的例子．首先，我们将证明 $SU(2)$ 是单连通的．为此考虑具有下列形式的矩阵集合 H：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

这里 a 和 b 是任意复数，符号“$-$”表示复共轭．

***习　题　3.22**

(a) 证明 H 中行列式不为零的元素构成的子集，即 $H-\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$，在矩阵乘法下成群，因此是 $GL(2, C)$ 的一个李子群．

(b) 证明 H 是一个实向量空间（采用矩阵加法），维数为 4，它的基由习题 3.19 的 J_1，J_2 和 J_3 以及矩阵 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 构成．

(c) 设 A 是 H 中的任意矩阵:

$$A=2\alpha_1J_1+2\alpha_2J_2+2\alpha_3J_3+\alpha_4I,$$

其中 $\{\alpha_i\}$ 是实数. 证明 A 是 $SU(2)$中的元素, 当且仅当

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1. \tag{3.73}$$

(d) 由此证明群 $SU(2)$到三维球 S^3 上有一个 1-1 映射. S^3 是一个单连通流形. (我们说 S^3 和 $SU(2)$ 是微分同胚的.)

下一步, 我们就来找多重覆盖映射 π: $SU(2)\to SO(3)$. 通过李代数元的指数映射, 我们容易构造它. 在 $SU(2)$ 中, 元素 J_1 的指数映射为

$$\begin{aligned}\exp(tJ_1)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{t}{2}\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&\quad+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}+\cdots\\&=\begin{pmatrix}\cos(t/2)&\mathrm{i}\sin(t/2)\\\mathrm{i}\sin(t/2)&\cos(t/2)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.74}$$

$SO(3)$ 的元素 L_1 的指数映射为

$$\begin{aligned}\exp(sL_1)&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\\&\quad+\frac{1}{2!}s^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\\&\quad+\frac{1}{3!}s^3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}+\cdots\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos s&-\sin s\\0&\sin s&\cos s\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.75}$$

如果我们简单地构成由代数提示的下列自然对应：

$$\pi:SU(2)\to SO(3),\ \pi:\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}t & \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}t\\ \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}t & \cos\frac{1}{2}t\end{pmatrix}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{pmatrix}, \tag{3.76}$$

那么，这一映射显然是这两个单参数子群之间的一个同态．而且 $SU(2)$ 的 t 和 $t+2\pi$ 这两个元素在 $SO(3)$ 中显然有相同的象．而且对于任意整数 n，$t+4n\pi$ 和 t 是 $SU(2)$ 中的同一点这样我们就证明了 $\exp(tJ_1)$ 是 $\exp(sL_1)$ 的双重覆盖．我们可以把这种情况推广到整个群上去：映射

$$t:\exp(t_1J_1+t_2J_2+t_3J_3)\mapsto\exp(t_1L_1+t_2L_2+t_3L_3) \quad (3.77)$$

是 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 上的双重覆盖．

因为我们知道 $SU(2)$ 具有三维球的整体拓扑，所以这一双重覆盖就使我们能得出 $SO(3)$ 的拓扑．$SU(2)$ 的单参数子群 $\exp(tJ_1)$ 起始于 $t=0$ 的 e，在 $t=4\pi$ 时又回到 e．在图 3.13 中，我们画了一个沿 S^3 的大圆来表示这一情况．(但请记住，我们还未在 $SU(2)$ 上定义度规．因此只有整体拓扑才是相关的，而与实际的距离无关．)用 t 和 $t+2\pi$ 标记的点是直径上的两个对径点．为了使它们成为 $SO(3)$ 中的同一点，我们单单把 $SO(3)$ 与 S^3 的上半球等同，并且把穿过赤道的直径的两个端点(例如 $t=\pi$ 和 $t=3\pi$)同化就可以了．S^3 的这一半加上这种同化后就不再单连通了．象 $\mathscr{C}$ 那样的曲线能光滑地收缩成一点，但是表示子群 $\exp(tL_1)$ 的曲线却不行，因为赤道直径的两端点不能聚

为一点：它们总是隔着直径遥遥相对．这种结构法也使得下列事实清楚了：$SO(3)$和$SU(2)$在e的某一邻域中是全同的．因此，它们的李代数是一样的．对于任意两个具有同样李代数的李群来说，都会产生这种情况．

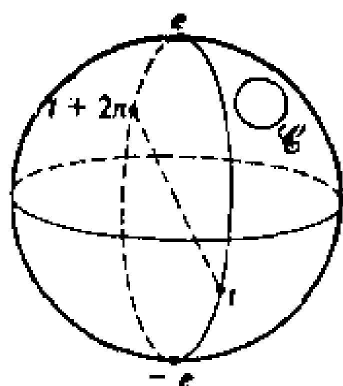


图 3.13 S^3 的一个二维切面，它包含 $SU(2)$ 的单参数子群 $\exp(tJ_1)$．群 $SO(3)$ 是上半球，并且直径两端的点是彼此同化的．

那么(3.70)式的李代数对应于什么群？这完全看你如何来解释了．作为一个抽象代数，它对应两个群．作为 R^3 中向量的一个关系，最通常就是把它与 $SO(3)$ 相联系，这只要把子群 $\exp(\theta L_1)$（绕 x 轴转动角度 θ）对应于 R^3 中的"曲线"$\exp(\theta\bar{e}_1)$（沿 x 轴长度为 θ 的一个向量）．物理学家是熟悉转动与向量之间的这种联系的．更熟悉的是这种联系的时间微分表述：把转动的变化率与角速度向量联系起来．这种方便的同化是在 3 维时偶然产生的，群 $SO(4)$ 是 6 维的，而它作用的向量空间 R^4 只有 4 维，因此就没有这类同化了．但是回到 R^3 来，我们用相同的方式同样能很好地把 R^3 与 $SU(2)$ 同化，在 3.18 节中，我们将看到，这种同化使我们能把粒子的自旋与 R^3 中的向量相关联，尽管对于 R^3 中的任意点 P，自旋甚至并不是 T_P 中的元素．

在结束对李代数的讨论之前，我们必须提一下：我们现在可以证明阿贝尔李代数是阿贝尔群的李代数．n 维阿贝尔代数很简单，就是一个向量空间，而它是 3.15 节中讨论过的李群 R^n 的代数．因为 R^n 是单连通的，所以任何其他有这一代数的李群必定被 R^n 覆盖，且在原点 e 的一个邻域中与它一致．因为 R^n 是阿贝尔的（$\bar{V}+\bar{W}=\bar{W}+\bar{V}$），因此有阿贝尔李代数的任意其他李群都是阿贝尔的．

3.17 实现和表示

通常最好把任意群作为抽象群来处理，即完全由群运算所定义的群，对于李群来说则再加上流形结构.因此，$SO(3)$作为抽象群，单单就是某一个三维流形，加上一个对任意两点 g 和 h 给出乘积点 gh 的法则，这一法则满足通常的群公理. 对于物理学家来说，这个抽象结构并不是群论中最为重要的那一部分. 更为重要的是，群作用于对象以及群是如何作用于它的. $SO(3)$ 再一次显得重要，是因为我们把它的一个元素与我们三维空间中的一个转动相联系. 这种联系称为实现. 群 G 的实现指的是 G 的任意元素与某一空间 M 中的变换 $T(g)$ 之间的一个联系(映射)，并且使群性质保持不变：(i) $T_e=I$(恒等变换，不改变 M)，(ii) $T(g^{-1})=[T(g)]^{-1}$，(iii) $T(g)\circ T(h)=T(gh)$. 如果该联系是 1-1 的，则称实现是忠实的，即若 $g\neq h$，则 $T(g)\neq T(h)$. 如果 M 是一个向量空间，而每一个 $T(g)$ 是一个线性变换$\left(\text{此向量空间上的一个}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{型张量}\right)$，则称这种实现为一个表示. 举几个例，可能有助于弄清这些概念.

(i) 考虑转动对单位球面 S^2 的作用，这里 S^2 由 R^3 中的方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 确定. 假定我们绕 x 轴转动 θ. 这就有把球面上坐标为 (x, y, z) 的任意点映为坐标为 (x', y', z') 的点的映射：

$$\begin{aligned} x'&=x,\\ y'&=y\cos\theta-z\sin\theta, \\ z'&=y\sin\theta+z\cos\theta, \end{aligned}\tag{3.78}$$

此点仍在球面上，因为 $(x')^2+(y')^2+(z')^2=1$. 用 (3.63) 式的符号，这一变换就与 $SO(3)$ 的群元 $\exp(\theta L_1)$ 相对应. 而群中的

任意元素，则对应于 S^2 到其自身中的一个变换. 因为 S^2 是一个流形，而不是一个向量空间，这就是 $SO(3)$ 的一个实现. 另一方面，同一变换 (3.78) 式可以看成是 R^3 到其自身中的一种映射，而不光是 S^2 到其自身中的一个映射. 因为 R^3 是一个向量空间，所以这就是 $SO(3)$ 的一个矩阵表示，这些矩阵把 R^3 中的向量变换成其他向量. 这些矩阵只不过是我们最初用来定义群 $SO(3)$ 的那些矩阵. 这一情况表明了一个微妙但有用的看法. 这是一种有典型意义的做法：对于一个群，首先用它的一个(忠实)实现或表示去定义它，因为这使我们能具体地去研究它的所有性质. 然而，此后把该群看成一个抽象群是更有用的，因为可能有一些其他的有用的表示或实现，这些情况我们最初是不知道的. 在下一节中，我们将用转动群来分别说明这两个方面.

(ii) 每一个群都至少有两个忠实实现：该群本身的左平移和右平移. 任意群元 g 定义了 G 的一个将任意 h 映为 gh 的变换(称为**右实现**或**主实现**)，以及另一个将 h 映为 hg^{-1} 的变换(称为**逆行实现**).

(iii)[†] 我们已经研究过的矩阵群——$GL(n, R)$, $O(n)$, $SO(n)$, $GL(n, C)$, $U(n)$, $SU(n)$ ——都是通过它们在 n 维实或复向量空间中的 $n\times n$ 矩阵变换这些忠实表示来加以研究的. 但是每一个李群 G 都有它作用在其自身的李代数上的线性变换所构成的另一种表示. 这就是所谓的**伴随表示**，它的定义如下：首先考察 G 到其自身中的映射 $I_g: h\mapsto ghg^{-1}$. 这是 G 的**群伴随实现**，它由 g 给出的左平移和 g^{-1} 给出的右平移组成. (这不一定是忠实的，若 G 是阿贝尔的，则 I_g 是恒等映射，它对所有 g 都有 $h\mapsto h$.)这种实现称为 G 的**内自同构**. 注意，每一个 I_g 将单位元 e 映为 e 自身，因此通过 e 的每一根曲线仍映为

† 此例可作为补充教材.

通过 e 的一根(可能不同的)曲线，如图 3.14 所示. 所以 I_g 诱导了一个映射，它把 T_e 中的任意切向量映为 T_e 中的另一切向量. 把这一映射称为由 g 诱导的 T_e 的伴随变换，并记作 Ad_g. 现在，若图 3.14 中所示的实曲线是一个单参数子群，例如说 $\exp(t\bar{X})$ (这里 $\bar{X}$ 属于 T_e)，那么因为

$$g(fh)g^{-1}=(gfg^{-1})(ghg^{-1}),$$

所以它在 I_g 下的象也是一个单参数子群. 由此可推得，图 3.14 中的虚线是由 $Ad_g(\bar{X})$ 生成的单参数子群

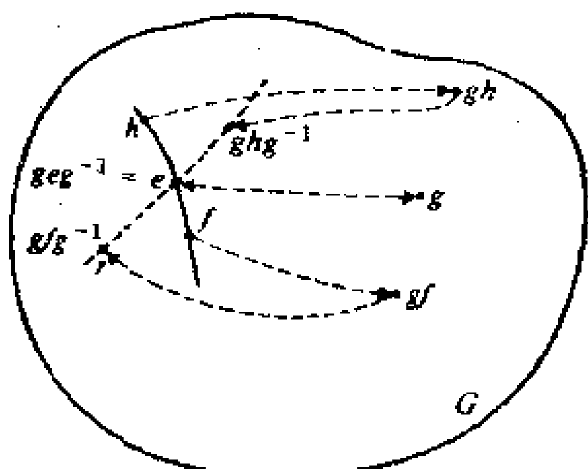


图 3.14 通过 e 的曲线在映射 $h\mapsto ghg^{-1}$ 下的变化，这在图中分两步给出：先是经过映射 $h\mapsto gh$，然后再经过映射 $gh\mapsto ghg^{-1}$，单位元 e 映为其本身，但靠近它的点 h 和 f 一般是要改变的. 因此 e 点的一个切向量映为另一个切向量.

$$I_g[\exp(t\bar{X})]=\exp[tAd_g(\bar{X})]. \tag{3.79}$$

现在，若 g 本身是单参数子群 $g(s)=\exp(s\bar{Y})$ 中的一个元素，那么应有一个自然的用 $\bar{Y}$ 来表示 $Ad_g(\bar{X})$ 的表达式. 下面的习题就是处理这个问题.

*习 题 3.23

证明

$$Ad_{g(s)}(\bar{X})=\exp(s\mathscr{L}_{\bar{Y}})\bar{X}. \tag{3.80}$$

3.18 球对称性，球谐函数和转动群的表示

我们已经讨论了开林向量及其与欧几里得空间的对称性的关系. 现在对球对称的例子集中地讨论一下，这样我们就能使

许多概念更明确. 对于具有度规张量 g| 的流形 M, 如果它的开林向量场的李代数有一个子代数(即一个子空间,它的括号仍在此子空间中),而这个子代数就是 $SO(3)$ 的李代数,则 M 称为**球对称的**. 我们必须说是一个子代数,因为 g| 可能有更多的对称性,但在这里我们将只考虑与它的球性质有关的那些对称性. 读者应该注意到, M "关于某一点"是球形的, 这种说法可能是错的, 因为这些球的"中心"可能不在 M 中(参见图 3.15). 我们的定义是内禀的: 李子代数涉及到 M 的向量场本身. 在 3.9 节中, 我们已看到向量场 $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$ 的李代数是什么((3.30)式). 通过定义 $\bar{V}_1=-\bar{l}_x$, $\bar{V}_2=-\bar{l}_y$ 和 $\bar{V}_3=-\bar{l}_z$, 我们看到向量场 $\{\bar{V}_i\}$ 的李代数与 $SO(3)$ 的李代数 (3.64) 式是一致的. 这表明现在对球对称的定义意味着 M 有一个具有球几何的曲面的叶状结构. (叶状结构定义于 3.7 节之中.)

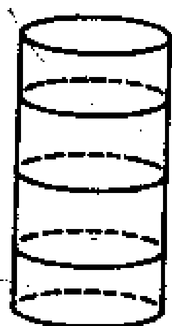


图 3.15 圆柱面是轴对称的, 但是它的对称圆的中心并不在该流形上.

假定我们现在集中讨论定义在二维球面 S^2 上的函数. M 上的任意函数在它的任意对称球面上定义了这样的一个函数. 我们定义函数空间 $L^2(S^2)$ 为由 S^2 上的所有复值平方可积函数构成的希尔伯特空间,存在范数

$$\|f\|=\left[\iint_{S^2}|f|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\right]^{1/2}, \tag{3.81}$$

这里的积分遍及球面上通常的面积元. (我们对这个空间的定义有一点草率,但对于我们这里的目的来说已是足够了.)空间 $L^2(S^2)$ 是一个无限维的向量空间, 它的元素是函数. 函数的线性组合是用常数来构成的, 有限个函数不能构成一个基. 把 $SO(3)$ 的元素 g 作为 S^2 到其自身中的一个映射 $R(g)$ 来实现,

那球面上的任意函数$f(x^i)$就被映为另一个函数，这简单地只要用这一映射带着这一函数移动就可以了．所以也可认为$R(g)$是$SO(3)$在向量空间$L^2(S^2)$中的一个表示．因为$L^2(S^2)$是无限维的，所以这是一个无限维的表示．于是产生了问题：是否有$L^2(S^2)$的一些有限维子空间，它们能给出$SO(3)$的表示．这种子空间必须在$SO(3)$下不变．这指的是，对于$SO(3)$中的任意元g及该子空间中的任意f，$R(g)[f]$必定仍在此子空间中．假定存在这样的一个子空间，$\{f_i, i=1, \cdots, N\}$是它的一个基，那它是不变的，当且仅当对任意数$\{a^i\}$，存在着$\{b^i\}$，使得

$$R(g)[a^i f_i] = b^i f_i. \tag{3.82}$$

因为该映射是线性的，所以有关系

$$b^i = g^i{}_j a^j, \tag{3.83}$$

这个等式对$SO(3)$的元素g定义了一个矩阵$g^i{}_j$，此矩阵称为g在此子空间中的表示．对于$SO(3)$在任意向量空间V的一个表示，如果不存在V的一个有限维子空间，它在$SO(3)$下不变，那么这一表示称为不可约的．

在$L^2(S^2)$中构成$SO(3)$的不可约表示在许多书中都有讨论（参见 Gel'Fand, Minlos & Shapiro, 1963）．物理学家都知道，不可约子空间的基函数是球谐函数Y_{lm}．我们不打算仔细地去构造它们，而仅简单地按照目前讨论的思路去理解它们．其结果如下：$L^2(S^2)$的每一个不可约子空间都由一个整数$l\geqslant 0$表征，它的维数为$2l+1$，函数$\{Y_{lm}, m=-l, \cdots, l\}$是该子空间（记作$V_l$）的基函数．而且对于一切$l$，把所有这些基并在一起，便是$L^2(S^2)$本身的一个基，这意味着球谐函数是完备的．因为$S^2$到其自身上的任意映射$R(g)$，是向量$\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$的一个线性组合的指数映射，所以$V_l$在$SO(3)$下不变的充要条件是：它在$\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$和$\bar{l}_z$下不变．$l=0$是一个极普通的例子，这里基函

数 $Y_{00}=1$，其李导数为：

$$l_x(Y_{00})=l_y(Y_{00})=l_z(Y_{00})=0,$$

所有这些当然都与 Y_{00} 线性相关. $l=1$ 是一个更好的例子，此时三个基函数是

$$Y_{1\,-1}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\,e^{i\phi},\ Y_{1\,0}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta,$$

$$Y_{1\,1}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\,e^{i\phi}. \tag{3.84}$$

习　题　3.24

(a) 若 x, y, z 是 R^3 的笛卡儿坐标，则在由 $x^2+y^2+z^2=1$ 给出的球面 S^2 上，有

$$Y_{1\,-1}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(x-iy),\ Y_{1\,0}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}z,\ Y_{1\,1}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(x+iy). \tag{3.85}$$

(b) 试构成所有的导数 l_iY_{1k}，例如

$$l_x(Y_{1\,-1})=-iY_{1\,0}/(2)^{1/2},\ l_z(Y_{1\,1})=iY_{1\,1}, \tag{3.86}$$

并证明空间 V_1 在 $SO(3)$ 下不变.

为什么要给 V_1 选一个这么特别的基？这主要是为了方便. 当基由有关算子的本征函数构成时是方便的，即对于某一算子 A 和常数 α 满足

$$Af=\alpha f \tag{3.87}$$

的函数. 选球谐函数的原因是在于它们是 l_z 和 $L^2=(\mathscr{L}_{l_x})^2+(\mathscr{L}_{l_y})^2+(\mathscr{L}_{l_z})^2$(其定义见习题 3.7)的共同本征函数. 下面的习题表明，这是我们能期望得到的最好结果：因为我们找不到 $\{l_x, l_y, l_z\}$ 中任意两个算子的非浅显的本征函数.

习　题　3.25

假定对于常数 α 和 β，函数 f 具有性质：

$$l_x(f) = \alpha f,\ l_y(f) = \beta f,$$

证明从李括号的关系式(3.30)能得到

$$\alpha = \beta = l_z(f) = 0.$$

顺便提一下，基函数的完备性来自下列事实：$\mathrm{i}l_z$ 和 L^2 是可换算子(参见习题 3.7)，它们都是(或能扩张为) $L^2(S^2)$ 上的自伴随算子. 泛函分析中的谱定理(参见 Riesz &Sz.-Nagy, 1955)保证了这些本征函数的完备性.

事实上，$SO(3)$ 的表示可以用比上述讨论要抽象得多的方式加以研究. 特别地，为了发展出大部分的数学内容，我们不必说出向量空间 V 是什么. 例如，$SO(3)$ 原有的表示(作为变换 R^3 中向量的矩阵)是不可约的. 因为除了极普通的 $\{0\}$ 外，R^3 的任意子空间在所有转动下都不是不变的，这个表示原来就形式地等同于球谐函数给出的 $l=1$ 的表示，它的维数也是 $3(=2l+1)$. 事实上，(3.85) 式就是 R^3 的一个从 (x, y, z) 到 $(Y_{1\,-1}, Y_{1\,0}, Y_{1\,1})$ 的坐标变换. 这一变换涉及到复数，但是只要对它们进行代数运算，则在球谐函数基中得到的(3.83)式的矩阵 $g^i{}_j$，就可以转变为在通常笛卡儿基中的矩阵表示. 可以证明，这些矩阵只不过是我们最初用来定义 $SO(3)$ 的那些矩阵.

习　题　3.26

设 $\{y^{j'}, j=1, 2, 3\}$ 表示函数$(Y_{1\,-1}, Y_{1\,0}, Y_{1\,1})$，且设 $\{x^j\}$ 表示 $\{x, y, z\}$. 试求出变换矩阵 $A^{j'}_{\ k}=\partial y^{j'}/\partial x^k$ 及其逆矩阵 $A^k_{\ j'}$. 用习题 3.24(b) 中的方法，求出算子 l_x 作用在球谐函数基上的矩阵 $X^{j'}_{\ k'}$：

$$l_x(y^{j'}) = X^{j'}_{\ k'} y^{k'},$$

把 $X^{j'}_{\ k'}$ 变换到笛卡儿基中去，

$$X^j_{\ k} = A^j_{\ i'} A^{r'}_{\ k} X^{i'}_{\ r'}.$$

再证明这正是(3.63)式中的 $-L_1$.

注意，$l=1$ 是 $SO(3)$ 上的最低维忠实表示（$l=0$ 的表示不是忠实的），这个表示通常称为 $SO(3)$ 的基本表示。当我们在 4.82 节中研究向量球谐函数时，我们将遇到 $SO(3)$ 不可约表示的另一个集合。这时的表示空间不是球面上的函数空间，而是球面上的向量场。

最后，我们要提一下 $SO(3)$ 表示与其覆盖群 $SU(2)$ 的表示之间的关系。（没有学过 3.16 节的读者可以跳过下面的内容。）因为对于 $SU(2)$ 的任意一个元素，有 $SO(3)$ 中的唯一元素与之对应，所以 $SO(3)$ 元素 g 的任意表示 $R(g)$ 自动地定义了 $SU(2)$ 的一个表示 S，对于 $SU(2)$ 中的任意 u，变换 $S(u)$ 是 $R(\pi(u))$。如果 u 和 u' 对应于 $SO(3)$ 的同一元素，则对于这个表示，有 $S(u)=S(u')$。但是 $SU(2)$ 也有其他表示，例如 T，当 $\pi(u)=\pi(u')$ 时，有 $T(u)\neq T(u')$。有时把这种表示称为 $SO(3)$ 的双值表示。我们只援引结果：$SU(2)$ 的不可约表示由指数 $k\geqslant 0$ 表征，它或是一个整数，或是一个半整数。k 为整数的那些表示是同 $SO(3)$ 的具有同一指标（即 $k=l$）的表示。而其他的表示是 $SO(3)$ 的双值表示。我们用以定义 $SU(2)$ 的那个矩阵表示就是后者的一个例子，这是一个复二维空间中的表示，它的 $k=\frac{1}{2}$，故称为 $\frac{1}{2}$ 旋表示。象 $l=1$ 的表示是 $SO(3)$ 的最低维忠实表示一样，$\frac{1}{2}$ 旋表示是 $SU(2)$ 的最低维忠实表示。如果我们在这个空间(其中的量称为旋量)中取任意基向量，且对它用 $\exp(tJ_1)$ 作用，这里 t 的取值从 0 到 4π，我们将看到：在 $SO(3)$ 中相应的路径 $\exp(tL_1)$ 从 0 到 2π 绕了两圈。当变换的序列达到 $t=2\pi$ 时，我们又回到了 $SO(3)$ 的原点，但在 $SU(2)$ 中却到达 $-e$。为此，我们说当旋量转动一个 2π 角度时，它改变了符号($e\to -e$)。

表示之间的这种对应不光是一种数学游戏，这一点确实是引人注意的．自旋为 $\frac{1}{2}$ 的基本粒子的波函数，可以用 $SU(2)$ 的一个非整数 k 的不可约向量空间中的一个元素来描述，这是物理学家可以用来说明自然界有优美的简洁性的一个例证．我们从球对称性的李代数开始，发现群 $SU(2)$（而不是 $SO(3)$），是具有这一代数的最简单的群（它有最简单的整体拓扑）．然而我们发现，尽管在 R^3 中难以把 $SU(2)$ 的作用"具体化"，但大自然使得它比 $SO(3)$ 来得更基本，因为存在着一些粒子，它们属于它的一些表示，而不是 $SO(3)$ 的表示！

3.19 参考文献

用老的方法处理李导数但又相当完全的书是：

K. Yano, *The Theory of Lie Derivatives and its Applications* (North-Holland, Amsterdam, 1955).

有关自伴算子的完备性定理可参见：

F. Riesz & B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis* (Ungar, New York, 1955).

在下面的参考书中，讨论李群和李导数之间的密切关系：

F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971);

M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Boston, 1970) vol. 1;

L. Auslander & R. E. MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds* (McGraw-Hill, New York, 1963).

有关李群的进一步讨论可参见：

R. Hermann, *Lie Groups for Physicists* (Benjamin, Reading, Mass., 1966);

H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover,

New York, 1950).

一些十分重要的群的表示理论在大多数量子力学书中都有讨论：

H. Weyl, 见上面所引；

H. Lipkin, *Lie Groups for Pedestrians* (North-Holland, Amsterdam, 1966);

M. A. Naimark, *Linear Representations of the Lorentz Group* (Pergamon, New York, 1964);

I. M. Gel'Fand, R. A. Minlos & Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications* (Pergamon, New York, 1963).

我们用到的矩阵代数，参阅下列书是会有帮助的：

M. W. Hirsch & S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* (Academic Press, New York, 1974).

第四章　微 分 形 式

本世纪初期，E·嘉当发展了微分形式的计算方法，这是微分几何中最有用和最有成果的解析工具之一。由形式来统一和简化的概念之多是令人惊讶的，诸如流形上的积分理论、叉积、三维欧几里得几何中的散度和旋度、矩阵的行列式、流形的可定向性、偏微分方程组的可积条件、斯托克斯定理和高斯定理等等都是。正如大多数确实是基本的数学和物理概念那样，形式的数学也是非常简单的。在本章中，我们从产生形式的最自然的几何角度来引入形式。然后我们再系统地展开它的丰富内容。

A　形式的代数和积分计算

4.1　体积的定义——微分形式的几何作用

到此为止，我们一直避免给流形规定任何形状或刚性。我们曾提到过定义度规张量的可能性，但是我们的讨论一直集中在那些不需要特定的度规就能定义的解析工具上。我们现在转向一类特别有用的张量，它们可以用来定义流形的体积元。

考察二维体积的概念，即通常的面积。欧几里得空间中的任意一对(无穷小)向量都定义了一个(无穷小)面积，如图4.1所示，这是由它们确定的平行四边形围成的面积。这样许多可能在长度和夹角上彼此不同的向量对，确定了同一面积，正如图4.2所示。因此，面积的概念与度规的概念相比，限制性就小一

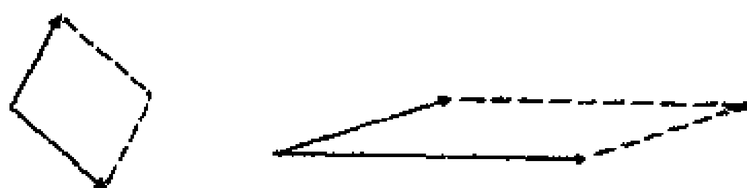


图 4.1 一对向量以及它们定义的面积.



图 4.2 三对向量定义了相同的面积.

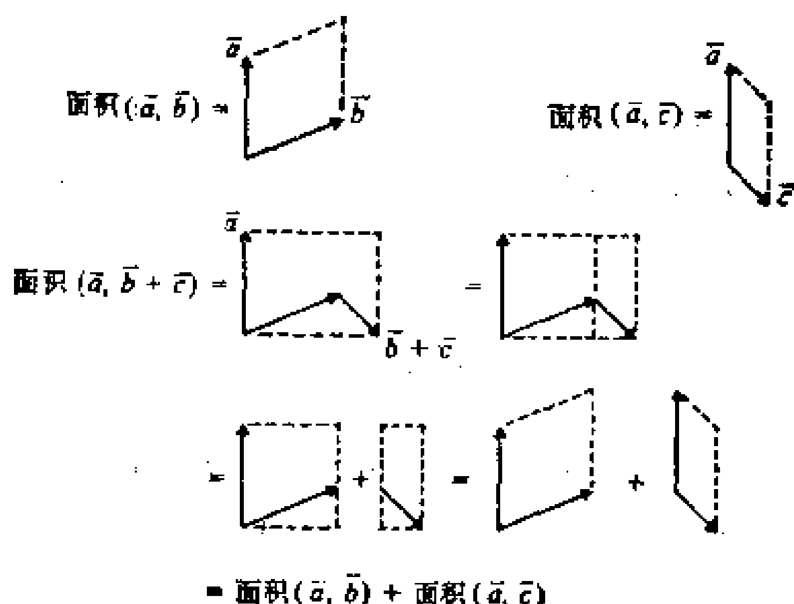


图 4.3 用几何法证明:平行四边形的面积是一个张量的值.

些:欧几里得度规定义了向量的长度及其夹角,而面积的确定只是由两个向量给出一个与之相联系的数. 自然,如果度规存在,那么它应当能唯一地定义面积. 我们将说明这一点是如何实现的. 但是可以在一个二维流形上定义面积(或一个任意流形上定义体积),而不必在流形上有度规的定义. 事实上,许多不同的度规可以定义同一体积.

假定在一个二维流形中的一点上，我们有两个线性无关的无穷小向量，构成一个二维的平行四边形．我们希望对于这一图形定义一个(小)面积，即对于这两个向量给出一个数与之对应．如果我们把其中一个向量的长度加倍，那么上述数也应该加倍．而且，我们要求它在向量的加法下是可加的，即

面积$(\bar{a}, \bar{b})+$面积$(\bar{a}, \bar{c})=$面积$(\bar{a}, \bar{b}+\bar{c})$．在欧几里得空间中，这一点是正确的．这已在图 4.3 中用几何方法证明了．在证明的最后第二步中，我们用到了下列事实：一个平行四边形的一条边如果沿着它所确定的直线平移一个任意量，则其面积不变．因此我们证明了面积(,)确实是一个**张量**，对于它的变量来说，是双线性的．因为该面积是一个数，这就是一个$\binom{0}{2}$型张量．而且，如果$\bar{a}$和$\bar{b}$是平行的，则它们所构成的面积必为零．因此，若互换$\bar{a}$和$\bar{b}$的位置，则该张量必改变符号．下面的练习将表明这一点．

习　题　4.1

试证明：若 $\mathbf{B}$ 是一个对于所有 $\bar{V}$ 具有性质 $\mathbf{B}(\bar{V},\bar{V})=0$ 的$\binom{0}{2}$型张量，则对于所有 $\bar{U}$, $\bar{W}$, 有 $\mathbf{B}(\bar{U},\bar{W})=-\mathbf{B}(\bar{W},\bar{U})$．（提示：取 $\bar{V}=\bar{U}+\bar{W}$.）这时我们说 $\mathbf{B}$ 对它的两个自变量是**斜对称的**．

现在更严密地来考察这一点．在图 4.4 中，画出了由两个向量确定的具有某一面积的一个平行四边形．若用分量来表示，该面积(可差一个符号)就是下列行列式：

$$\text{面积}=\begin{vmatrix} V^x & V^y \\ W^x & W^y \end{vmatrix}.$$

显然它在 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 的互换下具有斜对称性.

在通常的应用中,我们不管该数值所具有的符号,而把该行列式的绝对值称为面积. 但保留符号对于我们来说将会是方便的,因为它包含着有关这对向量是左手还是右手的信息. 下面我们将更详细地讨论这一点. 我们也将更详细地讨论体积张量与矩阵行列式之间的明显关系. 但是我们必须首先发展斜对称张量代数. 首先我们将集中讨论它们在任意点上的性质,然后再推广到场上去.

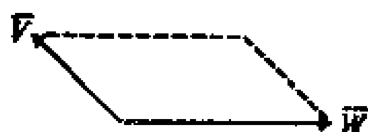


图 4.4 由 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 定义的面积.

4.2 反对称张量的记号和定义

正如上面习题 4.1 中所表述的那样,一个 $\binom{0}{2}$ 型张量,如果在把它的两个自变量互换时,它的值改变符号:

$$\tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) = -\tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U}),\text{对于所有 } \bar{U}, \bar{V} \leftrightarrow \tilde{\omega}\text{ 斜对称,} \tag{4.1}$$

那么这个张量称为**斜对称的**.对于 $\binom{0}{p}$ $(p\geqslant 3)$ 型张量,如果在把它的任意两个自变量互换时,它改变符号,那么称它为**完全斜对称的**. 从任意张量总能构造斜对称张量. 例如,若 $\tilde{\omega}$ 是一个 $\binom{0}{2}$ 型张量,$\tilde{p}$ 是一个 $\binom{0}{3}$ 型张量,则它们的**完全斜对称部分**是张量. 这些张量在任意自变量上的取值分别由下列两式给出:

$$\tilde{\omega}_A(\bar{U}, \bar{V}) = \frac{1}{2!}[\tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) - \tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U})], \tag{4.2}$$

$$\widetilde{p}_A(\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}) = \frac{1}{3!}[\widetilde{p}(\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}) + \widetilde{p}(\overline{V}, \overline{W}, \overline{U})$$
$$+ \widetilde{p}(\overline{W}, \overline{U}, \overline{V}) - \widetilde{p}(\overline{V}, \overline{U}, \overline{W})$$
$$- \widetilde{p}(\overline{W}, \overline{V}, \overline{U}) - \widetilde{p}(\overline{U}, \overline{W}, \overline{V})]. \tag{4.3}$$

这里的构成法则是，取自变量的每一个置换，对奇置换加上负号，偶置换加上正号. 1/2! 和 1/3! 分别是常用的规范因子，这样把 $\widetilde{\omega}_A$ 称为 $\widetilde{\omega}$ 的斜对称部分就适当了. 所有这一些都可以用指标记号表示出来，这只要把任意向量取成基向量便能得到了：

$$(\widetilde{\omega}_A)_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) \equiv \omega_{[ij]}, \tag{4.4}$$

$$(\widetilde{p}_A)_{ijk} = \frac{1}{3!}(p_{ijk} + p_{jki} + p_{kij} - p_{jik} - p_{kji} - p_{ikj}) \equiv p_{[ijk]}. \tag{4.5}$$

这里我们引入了方括号记号 $[i \cdots k]$，它表示这些指标的一个完全斜对称集合，同时包括相应的规范因子. 下面我们还将使用上面引入的一个记号，在一个张量上标以符号"~"(如 $\widetilde{p}$)，表示一个完全斜对称张量. 对于一次形式我们使用同样的记号，但它是一个"退化"的情况，因为它只有一个自变量.

习　题　4.2

(a) 如果 $\binom{0}{N}$ 型张量 $\widetilde{p}$ 的分量在任意两个指标的互换下是斜对称的，试证此时 $\widetilde{p}$ 是一个完全斜对称张量。

(b) 设 $\{A_{ijk}\}$ 是一个完全斜对称张量的分量，试证

$$A_{ijk} = A_{[ijk]}.$$

(c) 设 $\mathbf{A}$ 是一个 $\binom{0}{2}$ 型斜对称张量，而 $\mathbf{B}$ 是一个任意的 $\binom{2}{0}$ 型张量，证明此时有

$$A_{ij}B^{ij}=A_{ij}B^{[ij]},$$

也即 **A** 与 **B** 的缩并仅涉及到 **B** 的斜对称部分。

(d) 设 **A** 如(c)中所定义，而 **B** 是一个$\binom{2}{0}$型对称张量，即对于所有的一次形式 $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\sigma}$，有 $\mathbf{B}(\tilde{\omega},\tilde{\sigma})=\mathbf{B}(\tilde{\sigma},\tilde{\omega})$. 试证明：

$$A_{ij}B^{ij}=0. \tag{4.6}$$

完全斜对称张量有下述重要性质：在一个 n 维向量空间中，一个$\binom{0}{p}$型完全斜对称张量 $(p\leqslant n)$，最多具有

$$C_p^n=\frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{4.7}$$

个独立分量. 为了证明这一性质我们注意到，任意分量是由集合$(1,\cdots,n)$中选取 p 个不同的数字确定的. (必须是 p 个不同的数字，因为正如习题 4.1 中所述，如果任意两个指标相同，则此分量为零.)而选出的 p 个数字的次序(它们的有序排列给出张量上的指标)最多只能影响分量的符号. 因此，由给定的 p 个数字的一个集合，通过简单的排列得到的所有指标所确定的分量，如果其中任意一个是已知的话，那么其全体都是已知的. 所以独立分量的个数，正是从 n 个数中选出 p 个数的不同集合的个数，因此它就是上面给出的二项式系数.

习 题 4.3

若 $p>n$，证明：n 维向量空间上的$\binom{0}{p}$型完全斜对称的所有分量都为零.

4.3 微分形式

一个 p 次形式 $(p\geqslant 2)$ 定义为$\binom{0}{p}$型的一个完全斜对称张

量．如前所述，一个一次形式是一个$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$型张量．一个标量函数是一个零次形式．数 p 称为形式的次数．

习 题 4.4

对于固定的 p，证明：p 次形式全体的集合本身是一个向量空间，这里的加法运算在习题 2.4 中已定义．于是这个向量空间是所有$\begin{pmatrix}0\\p\end{pmatrix}$型张量空间的一个子空间．试求这个向量空间的维数．

正如运用算符"$\otimes$"可以从$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$型张量构造$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$型张量一样，我们可以定义一个运算 $\wedge$（称为"楔积"），从一次形式来构造二次形式：若 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 都是一次形式，定义

$$\tilde{p}\wedge\tilde{q}\equiv\tilde{p}\otimes\tilde{q}-\tilde{q}\otimes\tilde{p} \tag{4.8}$$

为它们的楔积．注意，与(4.2)式不同，这里没有 1/2! 因子．

习 题 4.5

证明 $\tilde{p}\wedge\tilde{q}$ 是一个二次形式．证明

$$\tilde{p}\wedge\tilde{p}=0.$$

习 题 4.6

设 $\{\vec{e}_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 是向量空间的一个基，而 $\{\tilde{\omega}^j\}$ 是其一次形式的对偶基．证明 $\{\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ n\}$ 是二次形式全体所构成的向量空间的一个基．提示：考察数 $\alpha_{ij}=\tilde{\alpha}(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)$，这里 $\tilde{\alpha}$ 是任意二次形式，从而证明：

$$\tilde{\alpha}=\frac{1}{2!}\alpha_{ij}\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j. \tag{4.9}$$

请特别注意(4.9)式中 1/2! 这一因子，因为对 (i, j) 求和时，包括了来自于 $\tilde{\omega}^i \otimes \tilde{\omega}^j$ 和 $\tilde{\omega}^j \otimes \tilde{\omega}^i$ 的同样的贡献，所以有该因子. 有些教科书在 $\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j$ 的定义或(4.8)式中引入了因子 1/2!，所以在它们的与(4.9)式相应的式子中就不出现 1/2! 了. 这仅是约定不同而引起的情况.

楔积的法则可以自然地推广到三次形式中去：

$$\tilde{p} \wedge (\tilde{q} \wedge \tilde{r}) = (\tilde{p} \wedge \tilde{q}) \wedge \tilde{r}$$

$$= \tilde{p} \wedge \tilde{q} \wedge \tilde{r} \equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{r} + \tilde{q} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{p} + - \cdots, \tag{4.10}$$

这里用了上一节用过的置换和符号。注意，这一表达式以及把它推广到多个一次形式上去，就使我们能定义任意个 p 次形式和 q 次形式的楔积. 这是由于根据习题 4.6，任意 p 次形式都可以表示成 p 个一次形式(基一次形式)的楔积的一个线性形式.

任意次数的所有形式构成的集合，加上对其元素定义的反交换乘法 $\wedge$，称为一个**格拉斯曼代数**.

习 题 4.7

证明：所有 p 次形式($p \leqslant n$)空间的维数之和是 2^n. (提示：应用二项式定理.)这正是格拉斯曼代数的空间的维数.

习 题 4.8

若 $\tilde{p}$ 是一个一次形式，而 $\tilde{q}$ 是一个二次形式，证明：

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk} = p_i q_{jk} + p_j q_{ki} + p_k q_{ij} = 3 p_{[i} q_{jk]}.$$

更一般地，若 $\tilde{p}$ 是一个 p 次形式，而 $\tilde{q}$ 是一个 q 次形式，试证明：

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{i \cdots jk \cdots l} = C_p^{p+q} p_{[i \cdots j} q_{k \cdots l]}. \tag{4.11}$$

4.4 微分形式的运算

形式的代数是很简单的，但是在掌握符号与阶乘因子时可能会有些困难．在本节和下节中，读者应小心和有耐心地去论证．这是求证任何结果的最好方法．作为例子，让我们来证明形式的交换法则．若 $\tilde{p}$ 是一个 p 次形式，而 $\tilde{q}$ 是一个 q 次形式，则

$$\tilde{p}\wedge\tilde{q}=(-1)^{pq}\tilde{q}\wedge\tilde{p}. \tag{4.12}$$

为了证明这一等式，首先把 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 表示成它们的分量与形式 $\tilde{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^j$ 和 $\tilde{\omega}^k\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^l$ 的楔积的乘积(在每一个楔积中，它们分别有 p 个因子和 q 个因子)之和．现在我们来说明(4.4)式对下列各简单乘积的应用：

$$(\tilde{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^j)\wedge(\tilde{\omega}^k\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^l).$$

根据楔积的结合律，这一表示式中的括号是多余的．现在如果互换其中的任意两个因子（例如互换 $\tilde{\omega}^j$ 和 $\tilde{\omega}^k$），这一表达式便改变符号．移动 $\tilde{\omega}^j$ 穿过 $\tilde{\omega}^k\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^l$ 的 q 个因子，需要 q 个这样的互换，因此

$$\begin{aligned}&\tilde{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^l\\&=(-1)^q\tilde{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^k\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^l\wedge\tilde{\omega}^j.\end{aligned}$$

对 $\tilde{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^j$ 中的每一个因子(共有 p 个因子)都这样去做，就给出原有表达式的 $[(-1)^q]^p$ 倍．这就证明了 (4.12) 式．

另一个我们将会用到的运算是向量与形式的缩并．一个 p 次形式需要 p 个向量自变量才能给出一个实数．如果给出了一个自变量，则它变为一个 $(p-1)$ 次形式．为了确定起见，我们定义

$$\tilde{\alpha}(\vec{\xi})\equiv\tilde{\alpha}(\vec{\xi},\underbrace{\ ,\ ,\ ,\ \cdots,\ }_{p-1\text{ 个空位}}),\quad [\tilde{\alpha}(\vec{\xi})]_{j\cdots k}=\alpha_{ij\cdots k}\xi^i \tag{4.13}$$

为由 $\tilde{\alpha}$ 和 ξ 缩并而得到的 $(p-1)$次形式. 注意,把 ξ 放入第一个以外的任意位置时,仅只影响 $\tilde{\alpha}(\xi)$ 的符号. 为了能对这一情况有所体验,我们考虑 $\tilde{\alpha}=\tilde{p}\wedge\tilde{q}$, 这里 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 都是一次形式:

$$(\tilde{p}\wedge\tilde{q})(\xi)=(\tilde{p}\otimes\tilde{q}-\tilde{q}\otimes\tilde{p})(\xi)=\tilde{p}(\xi)\tilde{q}-\tilde{q}(\xi)\tilde{p}.$$

因此, 尽管 ξ 是放入 $\tilde{p}\wedge\tilde{q}$ 的第一个位置内进行缩并, 然而 $\wedge$ 运算中隐含着的一些置换就保证了 ξ 与楔积中的每一个一次形式都有缩并. 类似地,对于 p 个一次形式的一个乘积,我们有

$$\begin{aligned}&(\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^k)(\xi)\\&=\xi^i\tilde{\omega}^j\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^k-\xi^j\tilde{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^k+\cdots\pm\xi^k\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\cdots\\&=p\xi^{[i}\tilde{\omega}^j\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^{k]}.\end{aligned}\qquad(4.14)$$

由此及(4.2)式的推广,我们得到:若 $\tilde{\alpha}$ 是一个 p 次形式,则

$$\tilde{\alpha}(\xi)=\frac{1}{(p-1)!}\xi^i\alpha_{ij\cdots k}\tilde{\omega}^j\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^k.\qquad(4.15)$$

当然(4.13)式和(4.9)式是含有这一性质的. 类似地,如果 $\tilde{\alpha}$ 是任意形式,而 $\tilde{\beta}$ 是一个 p 次形式,那么

$$(\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha})(\xi)=\tilde{\beta}(\xi)\wedge\tilde{\alpha}+(-1)^p\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha}(\xi).\qquad(4.16)$$

通过考察 $\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha}$ 的每一个分量,同样可以证明这一等式.

习 题 4.9

证明(4.16)式.

$\tilde{\alpha}(\xi)$ 的另一个广为采用的符号是 $\underset{\sim}{\xi}\rfloor\tilde{\alpha}$.

4.5 形式的限制

把一个流形限制在原来向量空间 V 的一个子空间上,是一个基本而又重要的概念. 因为一个 p 次形式 $\tilde{\alpha}$ 是一个 $\binom{0}{p}$ 型张

量，所以它的定义域是 V 中所有向量所构成的集合（严格地说，定义域是乘积空间 $V\times V\times\cdots\times V$，即 V 的 p 个"复本"）．把 α 限制在 V 的子空间 W 上，指的是同一个 p 次形式 $\tilde{\alpha}$，但后者的定义域现在限制在 W 中的向量上．我们用符号 $\tilde{\alpha}|_W$ 来表示这一限制后的形式，并有

$$\tilde{\alpha}|_W(\overline{X},\cdots,\overline{Y})=\tilde{\alpha}(\overline{X},\cdots,\overline{Y}),$$

这里 $\overline{X},\cdots,\overline{Y}$ 都在 W 中．因此，$\tilde{\alpha}|_W$ 仅定义在 W 上．注意，当 W 的维数 m 比 p 小时，则限制 $\tilde{\alpha}|_W$ 必为零（若 $p>m$，则任意 p 次形式在一个 m 维空间上必为零）；而当 $p=m$ 时，$\tilde{\alpha}|_W$ 只有一个独立分量．对一个形式进行限制的运算，通常称为对它横截．因为我们得到的图象是，向量子空间 W 是一个通过（横截）表示一个形式的一系列曲面的一个平面．当把一个形式限制在一个向量子空间上为零时，则称该形式被该向量子空间零化．

4.6 形式的场

正如任意张量那样，流形 M 上的一个 p 次形式场指的是一种（具有适当的可微条件的）法则，它在 M 的每一点给出一个 p 次形式．迄今我们一直是把形式作为空间 T_P（在 M 的任意点 P）上的函数来应用的，只有一点需要说明一下：由于 M 的子流形 S，在 S 的每一点 P 挑选出流形 M 的切空间 T_P 的一个子空间 V_P，我们就把 p 次形式场 $\tilde{\alpha}$ 在 S 上的限制，定义为在 P 点把 $\tilde{\alpha}$ 限制在 V_P 所构成的场．在 3.6 节中，我们已经有过一次形式的一个这样的例子．

4.7 手征性和可定向性

在一个 n 维流形中，在任意一点只有一个一维的 n 次形式空间（习题 4.7）．选取某一 n 次形式场，记为 $\tilde{\omega}$，在点 P 取定

一个向量基 $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$，因为它们是线性无关的向量，所以当且仅当在 P 点 $\tilde{\omega}\neq 0$ 时，数 $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n)$ 才是非零的．因此 $\tilde{\omega}$ 把 P 点的所有向量基分成两类：使 $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n)$ 为正的基为一类，使 $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n)$ 为负的基为另一类．事实上这种分类与 $\tilde{\omega}$ 无关．因为若设 $\tilde{\omega}'$ 是 P 点的任意其他非零 n 次形式，则存在一个数 $f\neq 0$，使得 $\tilde{\omega}'=f\tilde{\omega}$．任意两个使 $\tilde{\omega}$ 得出正值的基，会使 $\tilde{\omega}'$ 得出同样的符号（若 $f>0$，则都为正的；若 $f<0$，则都为负的），因此仍属于同一类．这样，一点处的所有基可以分为两类：右手的和左手的．（那一类取哪一种名称，这当然是一种约定；重要的是这两类本身是不同的．）如果在整个流形上能首尾一致地（即连续地）定义手征性，那么称这个流形是（内部）可定向的．这指的是，可以定义一个连续的向量基 $\{\bar{e}_1(P), \cdots, \bar{e}_n(P)\}$，在每一处它都保持相同的手征性．显然，这等价于能够定义一个处处不为零的连续 n 次形式．欧几里得空间是可定向的，而默比乌斯带则不然．

4.8 体积和定向流形上的积分

现在我们再回到形式与体积元有关的这一观点上来．在一个 n 维流形中，n 个线性无关（"无穷小"）向量定义了一个非零体积的区域，即一个 n 维的平行六面体．因而该区域的体积就是一个 n 次形式的值．我们可以自由地选择任意 n 次形式为体积 n 次形式，这样就可以根据要解的特定问题来选取了．

现在，函数在一个流形上的积分本质上就必须包括，用一个小坐标元素的体积与该函数的值相乘，然后再把所有这种值加起来．根据我们对体积形式的讨论，我们将对此引入一个有用的记号．假定 $\tilde{\omega}$ 是 n 维流形 M（它的坐标是 $\{x^1, \cdots, x^n\}$）中一个区域 U 上的一个 n 次形式．因为一点处的所有 n 次形式构

成一个一维向量空间，所以就存在某一个 $f(x^1, \cdots, x^n)$，使得

$$\tilde{\omega}=f\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n.$$

为了在 U 上积分，我们把 U 分成一些由 n 重向量 $\{\Delta x^1\partial/\partial x^1, \Delta x^2\partial/\partial x^2, \cdots, \Delta x^n\partial/\partial x^n\}$ 张成的微小区域（"胞腔"），这里 $\{\Delta x^i\}$ 都是一些非常小的数。函数 f 在一个小胞腔上的积分，近似地就是 f 的值与下列表达式的乘值：

$$\Delta x^1\Delta x^2\cdots\Delta x^n=\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n(\Delta x^1\partial/\partial x^1, \cdots, \Delta x^n\partial/\partial x^n).$$

因此，我们有

$$\int_{\text{胞腔}}f(x^1, \cdots, x^n)\mathrm{d}^nx\cong\tilde{\omega}(\text{胞腔}). \tag{4.17}$$

把不同胞腔的所有贡献加起来，并取当每个胞腔的大小趋近于零时的极限，给出了我们所说的 $\tilde{\omega}$ 在 U 上的积分：

$$\int\tilde{\omega}\equiv\int f(x^1, \cdots, x^n)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n, \tag{4.18}$$

此式中右边的积分是通常微积分中的积分，而左边的积分是我们的新定义。由于左边的形式中没有出现坐标，所以我们必须证明这一积分确实与 U 的坐标选取无关。下面我们仅就二维情况作出证明，因为把这一证明推广到一般情况中去是显然的。首先考察坐标 λ 和 μ。于是我们有

$$\int\tilde{\omega}\equiv\int f(\lambda, \mu)\tilde{\mathrm{d}}\lambda\wedge\tilde{\mathrm{d}}\mu=\int f(\lambda, \mu)\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu.$$

当我们变换到坐标 x 和 y 时，则由链规则给出：

$$\tilde{\mathrm{d}}\lambda=\tilde{\mathrm{d}}\lambda(x, y)=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y,$$

$$\tilde{\mathrm{d}}\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x+\frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y,$$

这是由梯度的定义（例如说 $\tilde{\mathrm{d}}\lambda$）得到的。因此我们得到（注意到 $\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}x\equiv0$，因为它是斜对称的）：

$$\tilde{\mathrm{d}}\lambda\wedge\tilde{\mathrm{d}}\mu=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y\right)\wedge\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x+\frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y\right)$$

$$=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}y+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}y\wedge\tilde{\mathrm{d}}x$$

$$=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}y. \tag{4.19}$$

$\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}y$ 前的因子是坐标变换的雅可比行列式 $\partial(\lambda,\mu)/\partial(x,y)$. 从通常的微积分, 我们知道这正是体积元实际变换的方式. 所以 f 的 (λ,μ) 积分与 f 的 (x,y) 积分恰好以正确的方式关联着.

但是, $\int\tilde{\omega}$ 的值并不是完全与原来选择的坐标无关. 我们已经证明的只是, 坐标变换不改变其值, 但是在(4.17)式中还有一个符号的不确定性. 这一方程给出了 $\int\tilde{\omega}$ 的原始的定义, 但是如果原来的坐标系有一个与我们选择的基有相反手征性的基时, 这一定义就会给出相反的符号: (4.17)式的右边保持不变, 因为形式是与基无关的, 但是在左边, f 将会改变符号. (这种改变并不是我们上面讨论过的那种坐标变换. 在坐标变换中, $\mathrm{d}^n x$ 将被一个负的雅可比行列式相乘, 这一切都说得通; 这种改变是把符号 $\int\tilde{\omega}$ 与一个微积分中的积分联系起来的原始约定中的改变.) 这种不确定性是不可逆的. 习惯上在 U 中选取一个定向, 即在基的两个类中定义其中一个为右手的, 且在(4.17)式的定义中应用一个右手坐标系. 所以我们得到, $\tilde{\omega}$ 在区域 U 上的积分, 除了定向外, 是唯一确定的.

在这一论述中, 主要的是 U 能用一个坐标系来覆盖. 我们是否能把这一积分推广到整个 M 上去, 而 M 也许没有一个整

体的坐标系？如果两个坐标片有一个单连通的重迭区域，那么在一个坐标片上选取的定向，显然在另一坐标片上诱导出一个唯一的定向，因而在这两个区域的并集上的积分就能很好地定义。显然当且仅当 M 是可定向的，这种做法便可扩展到整个 M 上去。从现在起，我们只讨论可定向流形上的积分。但是要提一下，这个理论已经由德雷姆推广到不可定向的流形上去，而且这可能有着有兴趣的物理应用（参见参考文献中 Sorkin（1977 年）的论文）。

正如我们已定义的那样，积分总是对具有最大次数的形式进行的：在 n 维流形上，就对 n 次形式进行积分。我们当然可以在一个 p 维子流形上对一个 p 次形式进行积分，只要该子流形本身是内部可定向的。假定 M 是可定向的，而 P 是 S 的一点，那么子流形 S 的内部定向与 M 的定向有何联系？给定一个 n 次形式 $\tilde{\omega}$，在 P 点把它定义为"右手的"（或"正向的"），对 S 的 p 次形式在 P 点是否存在一个唯一的"诱导"定向呢？不幸的是，答案是否定的，因为 $\tilde{\omega}$ 就其本身而言并不能为 S 提供些什么。这是因为 $p<n$，把 $\tilde{\omega}$ 限制在 S 上就是零。通常是如下进行的：通过定义在 P 点不与 S 相切的 $(n-p)$ 个线性无关的"法向量" $\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_{n-p}$，以及把下列 p 次形式

$$\tilde{\omega}(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_{n-p})$$

在 S 的限制，定义为右手系，由此把 $\tilde{\omega}$ 从一个 n 次形式简约为一个 p 次形式。这种定义显然取决于向量 $\{\bar{n}_i\}$ 的选取，包括它们的编号次序。给出这样的一个选取就称为为 S 在 P 点选定了一个**外部定向**。在下面证明斯托克斯定理时，我们将给出这样的一个例子。如果可以在整个 S 上连续地定义外部定向 $\{\bar{n}_i, i=1, \cdots, n-p\}$（这里"连续地"意味着保持 $\bar{n}_i$ 线性无关，且不与 S 相切），那么称 S 是**可外部定向的**。

下列两种情况是显然的：如果 M 的包含 S 的某一点开区域是可定向的话，那么要么 S 既可内部又可外部定向，要么内部和外部都不可定向；如果不存在 M 的这种可定向区域，那么 S 或可内部定向或可外部定向，但不能两者都可定向．例如，把默比乌斯带作为 R^3 中的一个二维子流形来考虑（图 4.5）．该带上的一根曲线是该带的一个一维子流形（图 4.6）．在带上的任意点 P 上给出一个向量右手三重组，其中两个向量位于该带上，第三个向量则指向外面．把它们连续地沿着带转一圈，而恒保持前面两个向量与带相切．当指向外面的向量回到原处时，它的方向总是与原来的相反了．这说明默比乌斯带在 R^3 中不可外部定向．类似地，在带上给出两个向量，其中一个向量与曲线 $\mathscr{C}_1$ 相切，而另一个向量不相切．当把它们连续地移动一圈，则指向曲线一侧的向量回到原处时却指向带中该曲线的另一侧．尽管我们知道该曲线是可内部定向的（不管它嵌入什么空间之中，它总有这一性质）．在一个较大的不可定向的流形中，它却不能外部定向．与之相反，曲线 $\mathscr{C}_2$ 在带中既是内部可定向又是外部可定向的，因为它"感觉"不到该带的不可定向性．它位于该带的一个可定向的邻域之中．

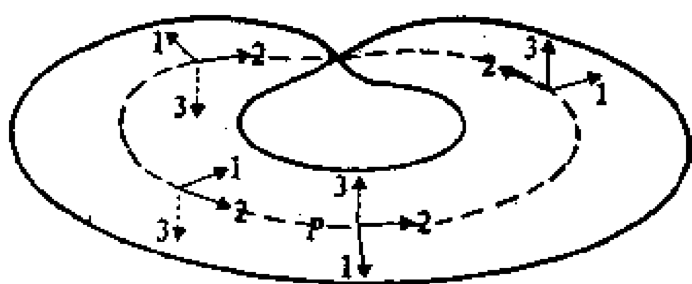


图 4.5 R^3 中的默比乌斯带．认为它是由橡皮做成的，就很容易想象它了．一根橡皮带平放在纸面上，只是在图形的顶端附近才有一个扭曲．P 点有一个向量三重组，将它顺时针地沿着由虚线表示的路径回转．如果要保持向量 1 和 2 在带上，而全部的三个向量线性无关，则这一向量三重组就不能连续地形变到它最初的位置．

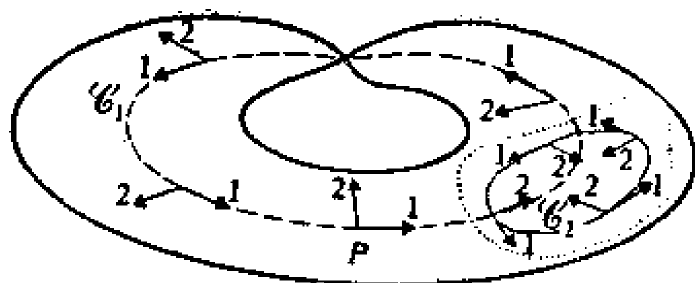


图 4.6 默比乌斯带上的一些曲线. 曲线 $\mathscr{C}_1$ 不可外部定向: 向量 1 和 2 从 P 点开始, 如图 4.5 所示那样移动. 若要保持 1 与曲线相切, 并保持向量 1 和向量 2 线性无关的话, 这一向量二重组就不能连续地形变到它最初的位置. 但是曲线 $\mathscr{C}_2$ 是可以外部定向的, 因为存在此曲线的一个邻域(图中点线所示的区域), 在其中选择一致的定向是可能的.

4.9 N 次向量, 对偶与符号 $\epsilon_{ij\cdots k}$

至此我们一直考虑的是 $\binom{0}{N}$ 型完全斜对称张量. 当然, 用平行的做法, 对 $\binom{N}{0}$ 型张量也能构造格拉斯曼代数. 一个 $\binom{N}{0}$ 型完全斜对称张量称为一个 N 次向量. 象形式一样, 在 n 维流形中的任意点处的所有 p 次向量构成向量空间, 它的维数是 C^n_p.

注意在一点处, 下列四个空间是具有相同维数的: p 次形式的向量空间, $(n-p)$ 次形式的向量空间, p 次向量的向量空间, 以及 $(n-p)$ 次向量的向量空间, 它们的维数都是 $C^n_p=C^n_{n-p}$. 在某些情况下, 我们在这些空间之间可找到一个 1-1 的映射. 早在 2.29 节中我们已经看到, 度规张量给出从 $\binom{0}{p}$ 型张量到 $\binom{p}{0}$ 型张量之间的一个 1-1 映射. 不难看出这一映射保持反对称性, 所以它可逆地把 p 次形式映为 p 次向量. 然而, 不管是否定义了度规, 一个体积 n 次形式 $\tilde{\omega}$ (即一个处处不为零的 n 次形式)

给出了 p 次形式和 $(n-p)$ 次向量之间的一个映射. 这个映射称为对偶映射. 我们现在来说明如何构造它. (注意:不要把这里的对偶映射与第二章中对一次形式讨论的对偶基的概念相混淆. 前者依赖于 $\tilde{\omega}$, 且将一个 $\binom{0}{p}$ 型张量唯一地映成一个 $\binom{n-p}{0}$ 型张量,或反过来. 而后者与 $\tilde{\omega}$ 无关, 且将 n 个 $\binom{1}{0}$ 型张量的一个集合唯一地映成 n 个 $\binom{0}{1}$ 型张量的一个集合或反过来.)

设给定 q 次向量 $\mathbf{T}$, 它的分量为 $T^{i\cdots k}=T^{[i\cdots k]}$ (q 个指标). 它通过下列等式定义了一个张量 $\tilde{A}$:

$$A_{j\cdots l}=\frac{1}{q!}\,\omega_{i\cdots kj\cdots l}T^{i\cdots k}. \tag{4.20}$$

用符号表示,则可写为

$$\tilde{A}=\tilde{\omega}(\mathbf{T})$$

或简写为

$$\tilde{A}={}^*\mathbf{T}. \tag{4.21}$$

我们称 $\tilde{A}$ 是 $\mathbf{T}$ 关于 $\tilde{\omega}$ 的对偶. 从(4.20)式以及 $\omega_{i\cdots l}$ 在互换任意两个指标时的斜对称性, $\tilde{A}$ 显然是一个 $(n-q)$ 阶的完全斜对称张量($(n-q)$ 是 $\tilde{\omega}$ 与 $\mathbf{T}$ 的 q 个指标缩并后留下来的指标数). 也即 $\tilde{A}$ 是一个 $(n-q)$ 次形式. 这个映射就对任意 q 次向量定义了一个唯一的 $(n-q)$ 次形式. 下面我们将证明这一映射是可逆的. 但是我们先来说明一下,在三维欧几里得向量代数中,我们是熟悉这一映射的,在那里它是作为叉积出现的.

为了看清这一点请回想一下,在欧几里得空间中,我们对向量和一次形式通常是不加区别的:在笛卡儿坐标中,向量的分量

与其相伴的一次形式的分量是相等的. 因此我们得考虑两个向量 $\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 及其一次形式 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}$. 二次形式 $\tilde{U}\wedge\tilde{V}$ 有 $C_2^3=3$ 个独立分量, 它们是 $U_1V_2-U_2V_1$, $U_1V_3-U_3V_1$ 和 $U_2V_3-U_3V_2$. 向量 $\bar{U}\times\bar{V}$ 有同样的一些分量, 且容易证明:

$$^*(\bar{U}\times\bar{V})=\tilde{U}\wedge\tilde{V} \quad (\text{在三维空间中成立}). \tag{4.22}$$

习 题 4.10

应用(4.20)式证明(4.22)式.

这就阐明了叉积的一系列奇特性质: 为什么会有叉积存在? 为什么在非三维空间的情况中, 它就不存在(只有在三维情况下, 对偶映射才把向量映为二次形式)? 以及为什么 $\bar{U}\times\bar{V}$ 是一个"轴向量"? 最后一点是出自于下列情况: 习惯上把欧几里得空间中的 $\tilde{\omega}$ 定义成对基($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$)给出一个正值的体积. 如果改变基的手征性, 那么 $\tilde{\omega}$ 的符号也改变, 因此 $\bar{U}\times\bar{V}$ 的符号也改变了($\bar{U}\times\bar{V}$ 对 $\tilde{\omega}$ 的符号的依赖是这样的: $\bar{U}\times\bar{V}$ 必定由 $\tilde{\omega}$ 映为 $\tilde{U}\wedge\tilde{V}$, 而后者的符号是不改变的). 从而, 在坐标反演下, 通常的叉积要改变符号.

$\mathbf{T}$ 和 $^*\mathbf{T}$ 之间的这一映射是可逆的, 因为它们中的每一个都有相同的分量个数. (换言之, (4.20) 式所示的 $\mathbf{T}$ 与 $\tilde{\omega}$ 的缩并并不丧失从 $\mathbf{T}$ 得到的信息, 因为 $\mathbf{T}$ 对其所有的指标已是斜对称了.) 也即对于一给定的 p 次形式 $\tilde{A}$, 存在一个唯一的 $(n-p)$ 向量 $\mathbf{T}$, 使得 $\tilde{A}={}^*\mathbf{T}$. 这一点可以用公式表示出来, 为此用下列方程定义一个 n 次向量 $\omega^{i\cdots k}$ ($\tilde{\omega}$ 的逆):

$$\omega^{i\cdots k}\omega_{i\cdots k}=n!. \tag{4.23}$$

这里用到了因子 $n!$, 因为(4.23)式的求和中有 $n!$ 个相等的项: $\omega^{123\cdots n}\times\omega_{123\cdots n}=\omega^{213\cdots n}\omega_{213\cdots n}=\cdots$. 这个因子保证了规范化:

$$\omega^{123\cdots n}=\frac{1}{\omega_{123\cdots n}}. \tag{4.24}$$

对于 p 次形式 $\tilde{B}$ 定义

$$S^{i\cdots k}=\frac{1}{p!}\,\omega^{l\cdots m i\cdots k}B_{l\cdots m}, \tag{4.25}$$

并称 $\mathbf{S}$ 是 $\tilde{B}$ 关于 $\tilde{\omega}$ 的对偶，即

$$\mathbf{S}={}^*\tilde{B}. \tag{4.26}$$

为了表明这两个对偶关系的互逆性质，我们先来考虑标量函数. 把函数 f 看成为零次向量，它就有对偶的 n 次形式 $f\tilde{\omega}$. 这个 n 次形式又有对偶的零次向量：

$$^*(f\tilde{\omega})=\frac{1}{n!}\,\omega^{l\cdots m}(f\omega_{l\cdots m})=f.$$

因此我们证明了 $^{**}f=f$.

这种情况的一般关系可如下求得. 从一个 p 次形式 $\tilde{B}$ 开始，用(4.25)式定义 $(n-p)$ 次向量 $\mathbf{S}$. 再取 $\mathbf{S}$ 的对偶：

$$\begin{aligned}({}^*\mathbf{S})_{j\cdots l}&=\frac{1}{(n-p)!}\,\omega_{i\cdots kj\cdots l}S^{i\cdots k}\\&=\frac{1}{p!(n-p)!}\,\omega_{i\cdots kj\cdots l}\omega^{r\cdots si\cdots k}B_{r\cdots s}\\&=\frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\,\omega_{i\cdots kj\cdots l}\omega^{i\cdots kr\cdots s}B_{r\cdots s}.\end{aligned}$$

为了得到最后一行的结果，我们必须将 $(n-p)$ 个指标 $i\cdots k$ 中的每一个(通过置换)“穿过”所有 p 个指标 $r\cdots s$, 这给出 $(n-p)$ 个因子 $(-1)^p$. 现把指标 $(j\cdots l)$ 固定，例如说是 $(1\cdots p)$ (它们的名称显然是无关紧要的). 于是在下列和式中($(r\cdots s)$ 固定)：

$$\omega_{i\cdots k1\cdots p}\omega^{i\cdots kr\cdots s}$$

指标 $i\cdots k$ 必取自集合 $(p+1,\ \cdots,\ n)$. 因此在此和式中，最多有 $(n-p)!$ 个非零项，而且如(4.23)式那样，每一个这种项都是彼此相等的. 因此我们有

$$\omega_{l\cdots k1\cdots p}\omega^{l\cdots kr\cdots s}=(n-p)!\,\omega_{p+1\cdots n1\cdots p}\omega^{p+1\cdots nr\cdots s}.$$

而且这一和式除非$(r\cdots s)$是$(1\cdots p)$的一个置换，否则将等于零，因为不然的话，第二个ω中将有重复的指标．在对$(r\cdots s)$的求和

$$\omega^{p+1\cdots nr\cdots s}B_{r\cdots s}$$

中，最多有$p!$个非零项，而且它们仍然彼此相等。因此我们有

$$\omega^{p+1\cdots nr\cdots s}B_{r\cdots s}=p!\,\omega^{p+1\cdots n1\cdots p}B_{1\cdots p}.$$

把所有这些结果结合起来，就有

$$({}^{*}S)_{1\cdots p}=(-1)^{p(n-p)}\omega_{p+1\cdots n1\cdots p}\omega^{p+1\cdots n1\cdots p}B_{1\cdots p}.$$

但从(4.24)式，我们得出：

$$\omega_{p+1\cdots n1\cdots p}\omega^{p+1\cdots n1\cdots p}=1,$$

及
$$({}^{*}S)_{1\cdots p}=(-1)^{p(n-p)}B_{1\cdots p}.$$

因为这里的指标$1\cdots p$可以代表任意的指标，我们这就证明了

$$^{**}\tilde{B}=(-1)^{p(n-p)}\tilde{B}. \tag{4.27a}$$

类似地，如果我们从一个q次向量$\mathbf{T}$开始，就能得到

$$^{**}\mathbf{T}=(-1)^{q(n-q)}\mathbf{T}. \tag{4.27b}$$

注意，如果n是奇数，那么因子$(-1)^{p(n-p)}$恒为$+1$.

正如以前提到过的，度规把p次形式映为p次向量．把这一映射与对偶映射结合起来，就有一个把p次形式映为$(n-p)$次形式的映射，或q次向量映为$(n-q)$次向量的映射．通常也简单地用“*”来标记这一映射．当度规是不定的时候(例如，在相对论中，有些长度是正的，而有些长度是负的)，对符号就必须小心．下一节中，我们将更详细地讨论这一点．习题5.13给出了应用这种度规对偶的一个例子．

在讨论形式的代数时，引入完全斜对称的列维-齐维他符号是非常方便的：

$$\epsilon_{ij\cdots k}=\epsilon^{ij\cdots k}\equiv\begin{cases}+1, \text{当 } ij\cdots k \text{ 是 } 1, 2, \cdots, n \text{ 的一个偶置换;}\\ -1, \text{当 } ij\cdots k \text{ 是 } 1, 2, \cdots, n \text{ 的一个奇置换;}\\ 0, \text{其他情况.}\end{cases}\tag{4.28}$$

例如对三维流形,形式 $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3$ 在坐标系 (x^1, x^2, x^3) 中有分量 ϵ_{ijk},而在其他坐标系中,它的分量却将是 $h\epsilon_{ijk}$,这里 h 是某一函数.假定一个体积形式 $\tilde{\omega}$ 具有分量

$$\omega_{ij\cdots k}=f\epsilon_{ij\cdots k},\tag{4.29}$$

这里 f 是某一函数,则其逆为

$$\omega^{ij\cdots k}=\frac{1}{f}\epsilon^{ij\cdots k}.\tag{4.30}$$

*4.10 张量密度

我们采用了 n 维流形上的任意非零 n 次形式定义一个体积元的观点.在一个给定的问题中,有时会有两个或三个这种 n 次形式.(第五章中讨论的理想流体的流动是一个例子.在欧几里得空间的三维流形中,有三个由物理定义的三次形式:其中之一的积分给出一个区域的体积,另一个给出质量,而第三个是有关涡量的一个守恒量)因此把所有这些形式和与坐标无关的 n 次形式 $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^n$ 联系起来,有时就更方便了,因为后者的分量就是 $\epsilon_{ij\cdots k}$.若 $\tilde{\omega}$ 是一个我们感兴趣的 n 次形式,则关系式(4.29)可重新写为

$$\omega_{ij\cdots k}=\mathfrak{w}\epsilon_{ij\cdots k},$$

其中新定义的量 $\mathfrak{w}$ 称为标量密度,虽然 $\mathfrak{w}$ 是流形上的一个函数,但它并不是一个真标量,因为它与坐标有关.把坐标变换为 $x^{i'}=f^{i}(x^{j})$,$\tilde{\omega}$ 的分量就要乘以该变换((4.19)式)的雅可比 J,然而 $\epsilon_{ij\cdots k}$ 根据定义是不改变的.因此 $\mathfrak{w}$ 满足

$$\mathfrak{w}' = J\mathfrak{w}.$$

这是权为 1 的标量密度的变换规则("权"的定义在下面给出)可以推广这一概念，从而给出张量密度．例如，假定 $\mathbf{T}$ 是 n 维流形上的一个 $\begin{pmatrix}2\\n\end{pmatrix}$ 型张量，且它对其向量自变量是完全斜对称的：

$$T^{ij}_{\underbrace{k\cdots l}_{n\text{个指标}}} = T^{ij}_{[k\cdots l]},$$

于是经过与两个一次形式 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 的缩并，由 $\mathbf{T}$ 就给出一个体积形式 $\tilde{t}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$：

$$\tilde{t}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \mathbf{T}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}; , \cdots,),$$

$$t_{k\cdots l} = T^{ij}_{k\cdots l}\alpha_i\beta_j.$$

(物理学中会出现这种张量．例如第二章中提到过的应力张量，当与两个给定的一次形式缩并后，就给出应力密度．总应力是应力密度在该体积上的积分，这是应力张量乘以体积形式所得到的 $\begin{pmatrix}2\\n\end{pmatrix}$ 型张量的缩并的积分.) 可以把 $\mathbf{T}$ 的分量记为

$$T^{ij}_{k\cdots l} = \mathfrak{T}^{ij}\epsilon_{k\cdots l},$$

这个表达式定义了数 $\{\mathfrak{T}^{ij}\}$，它们是一个 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ 型张量密度的分量．(习惯上用德文字母来表示张量密度)．这种密度的变换规则是

$$\mathfrak{T}^{i'j'} = J\Lambda^{i'}_{k}\Lambda^{j'}_{l}\mathfrak{T}^{kl}, \tag{4.31}$$

这里 J 仍是雅可比行列式 ($\Lambda^{i'}_{j}$ 的行列式)．这是权为 1 的 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ 型张量密度的变换规则．

权指的是变换规则中 J 因子出现的个数．例如按

$$\mathfrak{w}' = J^2 \mathfrak{w}$$

变换的数是一个权为 2 的标量密度．推广到张量密度以及其他权上去是容易的．（通常的张量是权为 0 的张量密度．）对具有 0 和 1 以外权的密度是较难解释的，但是这些量有时是有用的．在本书中我们不去论述这些密度，而更喜欢使用 n 次形式本身．

*4.11 广义克罗尼克尔 δ 符号

列维-齐维他符号有许多有用和有趣的性质．我们在本节和下一节中将讨论其中的一些性质．正如我们在前面遇到过的，我们会常常遇到含 ϵ 的乘积，如 $\epsilon^{ij\cdots k}\epsilon_{il\cdots m}$．可以发展一套系统和方便处理它们的方法．

首先我们注意到，在二维情况中，对于任意非零二次形式 $\tilde{\omega}$，我们有

$$\omega_{ij}\omega^{kl} = \epsilon_{ij}\epsilon^{kl} = \delta^k_i\delta^l_j - \delta^k_j\delta^l_i. \tag{4.32}$$

其中第一个等式由(4.29)式和(4.30)式得出．推得第二个结果的最简单的方法是，只要注意到最后一个等式的两边对 (k, l) 和 (i, j) 都是斜对称的，因此考虑 $i \neq j$，$k \neq l$ 的情况就足够了．如果不管符号，那么这种项只有一项：$\epsilon_{12}\epsilon^{12} = 1$．(4.32) 式的右边此时显然也等于 1，这就证明了结果．用类似的一系列推理，可以把上述结果推广到一般的 n 维情况中去：

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij\cdots k}\epsilon^{lm\cdots r} &= \delta^l_i\delta^m_j\cdots\delta^r_k - \delta^l_j\delta^m_i\cdots\delta^r_k + \cdots \\ &= n!\,\delta^l_{[i}\delta^m_j\cdots\delta^r_{k]}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

可以用一个缩写的符号来表示这一结果．为此定义下列 p 次 δ 符号：

$$\delta^{i\cdots j}_{k\cdots l} = p!\,\delta^i_{[k}\cdots\delta^j_{l]}, \tag{4.34}$$

这里集合 $(i\cdots j)$ 和 $(k\cdots l)$ 都含有 p 个指标．于是作为一个特殊情况，就有

$$\epsilon_{ij\cdots k}\epsilon^{lm\cdots r}=\delta^{lm\cdots r}_{ij\cdots k}. \tag{4.35}$$

$(p+1)$次 δ 符号经过缩并可以得到 p 次 δ 符号，习惯上对第一对指标进行．从下式出发：

$$\delta^{ijk\cdots l}_{imr\cdots s}=(p+1)!\,\delta^i_{[i}\delta^j_m\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}$$

再对各项重排如下：

$$\begin{aligned}
&=p!\,\delta^i_i\delta^j_{[m}\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}-p!\,\delta^i_m\delta^j_{[i}\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}\\
&\quad-p!\,\delta^i_r\delta^j_{[m}\delta^k_i\cdots\delta^l_{s]}-\cdots-p!\,\delta^i_s\delta^j_{[m}\delta^k_r\cdots\delta^l_{i]}\\
&=p!\,\{n\delta^j_{[m}\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}-\delta^j_{[m}\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}\\
&\quad-\delta^j_{[m}\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}-\cdots-\delta^j_{[m}\delta^k_r\cdots\delta^l_{s]}\},
\end{aligned}$$

因此对 n 维空间中的 $(p+1)$ 次 δ 符号经过一次缩并，就有

$$\delta^{ij\cdots l}_{im\cdots s}=(n-p)\delta^{j\cdots l}_{m\cdots s}. \tag{4.36}$$

***习 题 4.11**

(a) 说明(4.36)式推导中每一步的道理．

(b) 从 n 次 δ 符号经过$(n-p)$次缩并给出下列 p 次 δ 符号：

$$\delta^{\overbrace{r\cdots s}^{}\,i\cdots j}_{\underbrace{r\cdots s}_{n-p}\,\underbrace{k\cdots l}_{p}}=(n-p)!\,\delta^{i\cdots j}_{k\cdots l}. \tag{4.37}$$

作为 p 次 δ 符号代数运算的一个应用，我们来计算三维欧几里得空间中的三重叉积．在笛卡儿坐标下，运算“$*$”用到 ϵ，而

$$(\bar U\times\bar V)_i=\epsilon_{ijk}U^jV^k,$$

所以

$$[\bar W\times(\bar U\times\bar V)]_i=\epsilon_{ijk}W^j\epsilon^k_{\ lm}U^lV^m=\epsilon_{kij}\epsilon^{klm}W^jU_lV_m.$$

应用(4.34)式和(4.36)式，有

$$\begin{aligned}
[\bar W\times(\bar U\times\bar V)]_i&=(\delta^l_i\delta^m_j-\delta^l_j\delta^m_i)W^jU_lV_m\\
&=U_i(\bar W\cdot\bar V)-V_i(\bar W\cdot\bar U).
\end{aligned}$$

这一推导是如此的灵巧，这就完全没有必要去死记三重叉积的公式了．

*4.12 行列式和 $\epsilon_{ij\cdots k}$

考察一个矩阵元为 A^{ij} 的 2×2 矩阵，我们将证明

$$\det(A)=\epsilon_{ij}A^{1i}A^{2j}. \tag{4.38}$$

为此，把右边的和式明晰地写出：

$$\epsilon_{ij}A^{1i}A^{2j}=\epsilon_{12}A^{11}A^{22}+\epsilon_{21}A^{12}A^{21},$$

其中我们用到 $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$ 这一事实．我们还有 $\epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=1$，因此得到

$$A^{11}A^{22}-A^{12}A^{21},$$

这是该矩阵的行列式的定义．下面的习题将此推广到 $n\times n$ 矩阵．

*习 题 4.12

(a) 证明一个矩阵元为 A^{ij} $(i, j=1, \cdots, n)$ 的 $n\times n$ 矩阵的行列式是

$$\det(A)=\epsilon_{ij\cdots k}A^{1i}A^{2j}\cdots A^{nk}. \tag{4.39}$$

(提示：$n\times n$ 矩阵的行列式是用 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式通过余因子法则来定义的．应用这一法则，从 2×2 矩阵出发用归纳法来证明(4.39)式．)

(b) 证明

$$\det(A)=\frac{1}{n!}\epsilon_{ab\cdots c}\epsilon_{ij\cdots k}A^{ai}A^{bj}\cdots A^{ck}.$$

*习 题 4.13

如果流形有度规，命 $\{\tilde{\omega}^i\}$ 是一次形式的一个正交归一基，并定义 $\tilde{\omega}$ 是下列好的体积形式：

$$\tilde{\omega}=\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^2\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^n,$$

若 $\{x^{i'}\}$ 是任意坐标系，试证明

$$\tilde{\omega}=|g|^{1/2}\tilde{d}x^{1'}\wedge\tilde{d}x^{2'}\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^{n'}, \tag{4.40}$$

这里，g 是由该度规张量在这一坐标系下的分量 $g_{i'j'}$ 组成的矩阵的行列式．

具体地讨论一下三维欧几里得空间的情况是有趣的. 由三个向量 $\bar{a}$, $\bar{b}$ 和 $\bar{c}$ 组成的平行六面体的体积, 是以这些向量的分量为行的矩阵的行列式. 所以, 从(4.39)式, 有

$$\text{体积}=\epsilon_{ijk}a^i b^j c^k=a^i(\epsilon_{ijk}b^j c^k)=a^i(\bar{b}\times\bar{c})_i=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}),$$

这是体积的另一个熟知的表达式.

4.13 度规体积元

在习题4.13中, 我们用流形的度规来定义某一正交归一基$\{\tilde{\omega}^i\}$, 并由此构造一个称之为"好体积形式"的 n 次形式 $\tilde{\omega}$ ((4.40)式). 这一形式是否应有"好的"称号? 它是否是唯一的? 或者说它是否取决于用以定义它的特定正交归一基(后者显然不是唯一的)? 回答是: 除了符号以外, 它是唯一确定的. 为了看出这一点, 请注意 $\tilde{\omega}$ 在原有基上的分量根据定义是 $\epsilon_{ij\cdots k}$. 如果 $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$ 是另一个正交归一基, 那么 $\tilde{\omega}$ 在这一基下的分量则是 $J\epsilon_{i'j'\cdots k'}$, 这里 J 是从 $\{\tilde{\omega}^i\}$ 到 $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$ 的变换的雅可比行列式. 但是因为这两个基都是正交归一的, 所以这一雅可比行列式是 ±1(下面给出证明). 因此, 形式 $\tilde{\omega}$ 与用 $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$ 定义的"好"形式之间最多差一个符号. 如果我们对手征性给出一个约定, 并用右手正交归一基来定义 $\tilde{\omega}$, 则 $\tilde{\omega}$ 就是唯一的. 因此对于一个可定向的流形而言, 一个度规就定义了唯一的一个体积形式. 从直觉上来看, 当然这是根本不足为奇的.

为了证明这一结果, 我们应用从一个正交归一系到另一个正交归一系的变换的雅可比行列式(即变换矩阵 $\Lambda^i_{j'}$ 的行列式)的绝对值为1这一事实. 这是不难证明的. 我们从度规张量的分量的下列一般变换规则出发:

$$g_{i'j'}=\Lambda^k_{i'}\Lambda^l_{j'}g_{kl},$$

用矩阵形式即可写为(参见2.29节)

$$(g') = (\Lambda)^T (g) (\Lambda).$$

g_{ij} 的这一变换规则，给出下列行列式之间的关系：

$$\det(g') = \det(g) [\det(\Lambda)]^2.$$

但是在正交归一基中，(g_{ij})是一个对角线元为 ± 1，而其他各元为 0 的矩阵.（回忆一下：若 g_{ij} 是不定度规，则并非所有对角元都有相同的符号.）因此(g_{ij})的行列式是 ± 1，且在任何正交归一基下都有相同的符号. 所以，对于雅可比行列式，就有

$$\det(\Lambda) = J = \pm 1.$$

在不定度规时，对偶运算"*"可以有两种不同的定义. 这是因为体积形式的逆 $\omega^{ij\cdots k}$ 有两种彼此相差一个符号的"自然"定义。我们以前采用的观点是

$$\omega^{ij\cdots k} \omega_{ij\cdots k} = n!,$$

即

$$\omega^{12\cdots n} = (\omega_{12\cdots n})^{-1}.$$

但是当有度规存在时，我们喜欢通过上升 $\tilde{\omega}$ 的指标定义一个 n 次向量 $\tilde{\omega}'$：

$$(\tilde{\omega}')^{ij\cdots k} = g^{il} g^{jm} \cdots g^{kr} \omega_{lm\cdots r}.$$

由(4.39)式和(4.40)式，得出

$$(\tilde{\omega}')^{ij\cdots k} = |g|^{1/2} \det(g^{lm}) \epsilon^{ij\cdots k}.$$

现在，因为(g^{lm})是(g_{ij})的逆矩阵，(g^{lm}) 的行列式就是 g^{-1}，因此有

$$(\tilde{\omega}')^{12\cdots n} = \frac{|g|^{1/2}}{g}, \tag{4.41}$$

而我们以前有过

$$(\tilde{\omega})^{12\cdots n} = \frac{1}{(\tilde{\omega})_{12\cdots n}} = \frac{1}{|g|^{1/2}}, \tag{4.42}$$

所以如果 g 是负的，它们就差一符号. 在相对论中（g 是负的），我们习惯于在逆对偶关系中使用 $\tilde{\omega}'$. 这就在诸如 (4.27) 式那样的一些等式中引入了一个附加的负号.

B 形式的微分及其应用

哪里有积分运算，哪里也就有微分运算. 因此我们将引入外微分运算. 它对形式进行运算，并得到形式(是前者的微分). 外微分是积分的逆运算，这一点的确切含义将在下面要证明的斯托克斯定理中反映出来. 该定理是微积分中下列基本定理的推广：

$$\int_a^c \mathrm{d}f = f(b) - f(a). \tag{4.43}$$

然后，我们将继续去揭示微分形式和偏微分方程之间的密切关系。

4.14 外微分

我们想定义一个作用在形式上的微分算子. 形式的这个微分算子把形式仍变为形式，而且在上述(4.43)式意义下，它是积分的逆. 注意，如果 M 是一个一维流形，把零次形式 f 变为一次形式 $\tilde{\mathrm{d}}f$ 的算子 $\tilde{\mathrm{d}}$ 确实满足(4.43)式. 因此，我们所要做的就是把 $\tilde{\mathrm{d}}$ 的作用对象推广为更高次的形式. 类似于 $\tilde{\mathrm{d}}$ 对零次形式的运算，$\tilde{\mathrm{d}}$ 的作用必须使形式的次数升高. 即若 $\tilde{\alpha}$ 是一个 p 次形式，则 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}$ 将是一个 $(p+1)$ 次形式. 推广 $\tilde{\mathrm{d}}$ 的合理的方式如下：

(i) $\tilde{\mathrm{d}}(\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}) = (\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}) + (\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\gamma})$,

(ii) $\tilde{\mathrm{d}}(\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}) = (\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha})\wedge\tilde{\beta} + (-1)^p\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}$,

(iii) $\tilde{\mathrm{d}}(\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}) = 0$.

其中 $\tilde{\alpha}$ 表示 p 次形式，$\tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\gamma}$ 表示 q 次形式. 性质 (ii) 与莱布尼兹法则只差$(-1)^p$，这个因子之所以出现，是因为我们为了使

算子 $\tilde{\mathrm{d}}$ 作用于 $\tilde{\beta}$，就必须使它“穿过”p 次形式 $\tilde{\alpha}$，而这就要与 p 个一次形式进行“交换”，每交换一次就给出一个因子 (-1). 这一性质将保证 $\tilde{\mathrm{d}}$ 保持法则 (4.12) 式. (具有性质 (ii) 的微分称为**反微分**.) 性质(iii)初看起来是奇怪的，但是检查 $\tilde{\alpha}$ 是一个函数 f 的情况，就可证明这一性质是合理的. 一次形式 $\tilde{\mathrm{d}}f$ 具有分量 $\partial f/\partial x^i$，如果有两次微分的话，那么它的分量将是 $\partial^2 f/\partial x^j\partial x^i$ 的线性组合. 但是作为一个二次形式，这个两次微分将对指标 i 和 j 是斜对称的. 然而 $\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j$ 是对称的(偏导数运算可交换). 所以它为零是有道理的. 性质(i)～(iii)加上 $\tilde{\mathrm{d}}$ 对函数的作用定义就唯一确定了 $\tilde{\mathrm{d}}$. (这是一个定理，在任何一本标准的参考书中都能找到这一定理的相当长的证明).

习 题 4.14

(a) 证明

$$\tilde{\mathrm{d}}(f\,\tilde{\mathrm{d}}g)=\tilde{\mathrm{d}}f\wedge\tilde{\mathrm{d}}g. \tag{4.44}$$

(b) 如果

$$\tilde{\alpha}=\frac{1}{p!}\,\alpha_{i\cdots j}\tilde{\mathrm{d}}x^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^j$$

是 p 次形式 $\tilde{\alpha}$ 在一个坐标基中的表达式，试用(a)的结果证明：

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}=\frac{1}{p!}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,(\alpha_{i\cdots j})\tilde{\mathrm{d}}x^k\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^j,$$

因此有

$$(\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha})_{ki\cdots j}=(p+1)\frac{\partial}{\partial x^{[k}}\alpha_{i\cdots j]}. \tag{4.45}$$

4.15 导数的标记法

从现在起，我们将常常用到偏导数. 对于流形上的任意函数 f 的偏导数，有下列标准和方便的符号：

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=f_{,i}. \tag{4.46}$$

注意，f 本身可能是一个张量的分量。如果是这种情况，逗号“,”就出现在所有其他指标以后：

$$\frac{\partial V^i_j}{\partial x^k}=V^i_{j,k}. \tag{4.47}$$

第二次求导习惯上用逗号后面的第二个指标表示，如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}=f_{,ik}. \tag{4.48}$$

求导的次序按指标从左到右进行（与书写 $\partial/\partial x^k$ 的习惯次序相反）。正如 2.27 节中讨论过的，必须注意到偏微分并不是对分量的一个允许的张量运算，也即函数 $\{V^i_{j,k}\}$ 一般并不与函数

$$\Lambda^i_{a'}\Lambda^{b'}_j\Lambda^{c'}_k V^{a'}_{b',c'}$$

相等，这里后者是从另一坐标系通过变换偏导数得到的。（请回忆一下，在 3.4 节中定义流形上张量的微分时对有关问题的讨论。）对标量函数的微分是一个例外。这时我们知道 $f_{,i}$ 是一次形式 $\tilde{d}f$ 的分量。（这里值得回顾一下 2.28 节中讨论过的关于标量和函数之间的区别。）作为一个例子，下列李括号

$$[\bar{U}, \bar{V}]^i=U^jV^i_{,j}-V^jU^i_{,j}$$

用了新的符号。显然右边的每一项各自并不象张量那样变换，但是它们合在一起却能按张量变换。同样，(4.45) 式中的偏导数也是以一种组合形式出现的，这种组合形式保证了它按张量变换。

习　题　4.15

证明 $V^i_{,k}$ 在一般的坐标变换下，并不按张量变换，随后证明 $[\bar{U},\bar{V}]^i$ 却按张量变换。

使用把微分指标置于所有其他指标后面的规约，(4.45) 式就可写为

$$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{i\cdots jk}=(-1)^p(p+1)\alpha_{[i\cdots j,k]}. \tag{4.49}$$

4.16 外微分的常见例子

正如楔积在三维空间中给出叉积那样，外微分（"楔微分"）给出旋度（curl）．考虑一个向量 $\bar{a}$，与其相伴的一次形式的外微分是

$$\tilde{d}\tilde{a}=\tilde{d}(a_1\tilde{d}x^1+a_2\tilde{d}x^2+a_3\tilde{d}x^3)$$
$$=a_{1,j}\tilde{d}x^j\wedge\tilde{d}x^1+a_{2,j}\tilde{d}x^j\wedge\tilde{d}x^2+a_{3,j}\tilde{d}x^j\wedge\tilde{d}x^3.$$

因为 $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^1=0$，并且对指标 2 和 3 也有类似的等式，上式成为

$$\tilde{d}\tilde{a}=(a_{1,2}-a_{2,1})\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^1+(a_{2,3}-a_{3,2})\tilde{d}x^3\wedge\tilde{d}x^2$$
$$+(a_{3,1}-a_{1,3})\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^3.$$

其中显然包含着旋度．为了把旋度作为一个向量分离出来，我们取 $\tilde{d}\tilde{a}$ 的对偶：

$$^*\tilde{d}\tilde{a}=(a_{1,2}-a_{2,1})^*(\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^1)+\cdots$$
$$=(a_{1,2}-a_{2,1})\epsilon^{213}\frac{\partial}{\partial x^3}+\cdots$$
$$=(a_{2,1}-a_{1,2})\frac{\partial}{\partial x^3}+\cdots$$

即

$$^*\tilde{d}\tilde{a}=\bar{\nabla}\times\bar{a}. \tag{4.50}$$

因此三维空间中的旋度算子就是 $^*\tilde{d}$．

不仅是旋度，还有散度（div），也能从外微分得到．对应于后者是算子 $\tilde{d}^*$，即从向量 $\bar{a}$ 出发，先取其对偶：

$$^*(\bar{a})={}^*\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}+a^2\frac{\partial}{\partial x^2}+a^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$
$$=a^1\,{}^*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}a^1\epsilon_{1jk}\tilde{d}x^j\wedge\tilde{d}x^k+\cdots$$
$$=a^1(\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3)+\cdots,$$

然后再求外微分：

$$\tilde{\mathrm{d}}^*\bar{a}=a^1_{,j}\tilde{\mathrm{d}}x^j\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^3+\cdots$$
$$=a^1_{,1}\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^3+\cdots$$
$$=(a^i_{,i})\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^3. \tag{4.51}$$

（在第一行中，只有 $j=1$ 的那一次在楔积中不为 0，由此得到第二行．）因此我们就证明了：

$$\tilde{\mathrm{d}}^*\bar{a}=(\nabla\cdot\bar{a})\tilde{\omega}, \tag{4.52}$$

这里 $\tilde{\omega}=\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^3$ 是笛卡儿坐标中的欧几里得体积元．在 4.23 节中，我们将推广这一散度公式，以适用于任意流形和任意 p 次向量．

习 题 4.16

应用(4.50)式、(4.52)式以及 4.14 节中的性质(iii)证明：在三维欧几里得空间的向量分析中，一个旋度的散度以及一个梯度的旋度都为零．

4.17 偏微分方程的可积条件

象形式本身一样，外微分与微积分中的一些熟悉的概念是密切相关的．举一个例子来说，考虑偏微分方程组：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g(x,\ y),\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=h(x,\ y). \tag{4.53}$$

设 $(x,\ y)$ 是一个流形的坐标，则上述方程组可写成：

$$f_{,i}=a_i,$$

这里 $a_x=g,\ a_y=h$．这一方程又可写成与坐标无关的形式：

$$\tilde{\mathrm{d}}f=\tilde{a}, \tag{4.54}$$

这里 $\tilde{a}$ 是一个分量为 g 和 h 的一次形式．现若 f 是此方程的一个解，则通过用 $\tilde{\mathrm{d}}$ 对它作用，我们就能得到一个正确的方程：

$$\tilde{\mathrm{d}}(\tilde{\mathrm{d}}f)=\tilde{\mathrm{d}}\tilde{a}.$$

但是根据定义 $\tilde{d}$ 的性质 (iii)，上式左边为零．这就得到该方程解存在的一个必要条件：

$$\tilde{d}\tilde{\alpha}=0.$$

用分量形式来表示，即有

$$\alpha_{[i,j]}=0.$$

实际上，(对二维流形上的一个二次形式)这仅是一个方程：

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}=0. \qquad (4.55)$$

当然，这就是方程组的可积条件．这样，外微分运算就从几何上导出了这些条件，而且由于使用符号的简洁，所以这通常是导出这一条件的最容易的方法．可积条件也是解存在的充分条件，这一事实将由 4.26 节所表述的弗罗比纳斯定理所保证．

4.18 恰当形式

根据外微分 $\tilde{d}$ 的定义，从 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$ 能推出 $\tilde{d}\tilde{\alpha}=0$．于是就会自然地问其逆命题是否成立，即如果 $\tilde{d}\tilde{\alpha}=0$，此时是否存在一个 $\tilde{\beta}$，使得 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$？满足 $\tilde{d}\tilde{\alpha}=0$ 的形式 $\tilde{\alpha}$ 称为闭的，满足 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$ 的形式 $\tilde{\alpha}$ 称为恰当的．闭的形式是否是恰当的？在下一节中，我们将证明：在下面所指的意义下，回答是肯定的．考察点 P 的一个邻域 $\mathscr{D}$，在其中 $\tilde{\alpha}$ 处处有定义，且 $\tilde{d}\tilde{\alpha}=0$．于是存在 P 的一个足够小的邻域，在其中 $\tilde{\beta}$ 处处有定义，且有 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$．显然，$\tilde{\beta}$ 不是唯一的：对于(具有适当次数的)任意 r，$\tilde{\beta}+\tilde{d}\tilde{r}$ 也能满足要求．

我们只能断定，闭形式是局部恰当的，因为这一命题在整体上不一定总是正确的．给定流形中的任意一个区域 $\mathscr{D}$，在其中 $\tilde{\alpha}$ 有定义且是闭的，此时也许不能找到一个 $\tilde{\beta}$ 在 $\mathscr{D}$ 中处处有定义，且使得 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$．

我们举一个 R^2 中的例子．考虑图 4.7 中曲线 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 所包围的圆环，并使用原点 P 在 $\mathscr{C}_2$ 中的笛卡儿坐标 x 和 y．下列一次形式：

$$\tilde{\alpha}=\frac{x\tilde{\mathrm{d}}y-y\tilde{\mathrm{d}}x}{x^2+y^2}$$

在此两曲线之间处处有定义，且具有 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}=0$ 的性质，这是容易验证的．是否存在一个函数 f 使得 $\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}f$？如果我们引入通常的极坐标 r 和 θ，于是容易看到 $\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}\theta$，因此我们显然有"肯定的"回答．但是此时却有一个问题，在我们感兴趣的区域中，即在 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 之间的区域中，θ 不是处处都是一个单值的连续函数．所以显然 $\tilde{\alpha}$ 在此区域中是处处都有完美的定义，但却不存在函数 f，使得处处有 $\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}f$．所以回答是局部地"肯定的"，而整体上却是"否定的"．如果我们忽略 $\mathscr{C}_2$，并考虑 $\mathscr{C}_1$ 的整个内部，这个问题就不存在了．因为 $\tilde{\alpha}$ 在 $x=y=0$ 处没有定义．类似地，如果我们考虑图 4.8 所示的区域，这个问题同样也不复存在了：因为此时 $\tilde{\alpha}$ 在 $\mathscr{C}$ 内部处处有定义，而且在 $\mathscr{C}$ 内部也可选择 θ 为单值连续的．因此，在这个简单的例子中我们已看到，虽然局部地 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}=0\Rightarrow\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}f$，但**整体**的问题（是否 f 处处有定义）却取决于所考虑的区域．

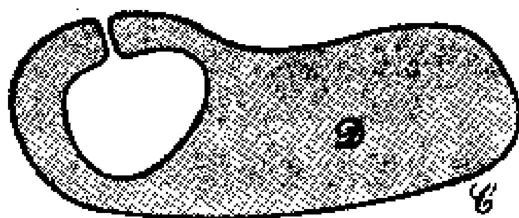


图 4.8　R^2 中的一个类似于图 4.7 的区域，但其边界是一条单连通曲线．θ 在绕 P 点的任意 $r=$常数的圆上的不连续处（θ 从 2π 跳到 0 的地方），可以选得出现在 $\mathscr{C}$ 的外部．

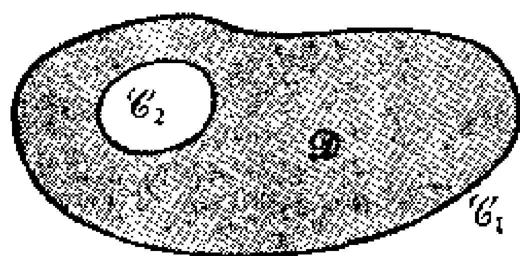


图 4.7　R^2 中的一个圆环区域．该区域并不包含它的两条边界．

显然，我们是在讨论一个区域或一个流形的拓扑的某一方面。研究这些决定闭形式和恰当形式之间关系的拓扑性质的理论称为上同调理论。在后面证明了斯托克斯定理以后，就将有足够的数学工具，使我们能在4.24节中简短讨论一下上同调理论。

*4.19 闭形式局部恰当性的证明

我们将证明下面一个称为庞加莱引理的定理。设 $\tilde{\alpha}$ 是一个 p 次闭形式 $(\tilde{d}\tilde{\alpha}=0)$，它在 M 的一个区域 U 中处处有定义，并设 U 有一个到 R^n 的单位开球（即由 $(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2=1$ 定义的球 S^{n-1} 的内部）上的1-1可微映射。于是在 U 中存在 $(p-1)$ 次形式 $\tilde{\beta}$，满足 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$。

在证明该定理之前，让我们先来看看这一映射是怎样的。显然，这意味着 U 由单独一个拓扑上的笛卡儿坐标系所覆盖。这确实是对 U 的一个拓扑条件：图4.7所示的区域并无此种坐标系，而图4.8所示的区域却有此种坐标系（如图4.9所示）。其他一些种类的区域，也会有这种映射。例如，R^n 本身就可以通过下列一些方程映到它的单位开球上去：

$$x^i \to \frac{2}{\pi} x^i \frac{\operatorname{arc\,tg} r}{r}, \tag{4.56}$$

$$r=[(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2]^{1/2}, \tag{4.57}$$

因为根据这两个方程，有

$$r \to \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} r \tag{4.58}$$

这个映射，甚至在原点也是一个 C^∞ 映射，这一点可以通过把 $\operatorname{arc\,tg} r$ 展开成泰勒级数看出：

$$\operatorname{arc\,tg} r = r-\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{5}r^5-+\cdots.$$

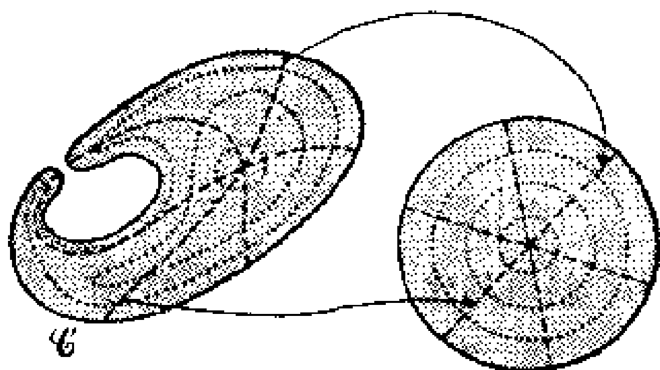


图 4.9 图 4.8 所示的区域到 R^2 中单位开球(单位圆的内部)上的一个映射。点线映为点线，虚线映为虚线，还标出了几个典型的点。显然这一映射可以构成 C^∞ 的，只要边界曲线 $\mathscr{C}$ 是 C^∞ 的。

为了证明本定理，我们应用 U 中的坐标 x^i，来构造我们所要寻求的形式 $\tilde{\beta}$. 假定 $\tilde{\alpha}$ 是

$$\tilde{\alpha}=\alpha_{i\cdots k}(x^1,\ \cdots,\ x^n)\tilde{\mathrm{d}}x^i\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^k, \tag{4.59}$$

这里每个分量 $\alpha_{i\cdots k}$ 都有 p 个指标. 把 $\tilde{\alpha}$ 与"径向向量" $\bar{r}$ (在坐标基中，它在任意点的分量都是 $x^1,\ \cdots,\ x^n$)缩并，并把所得的 $(p-1)$ 次形式记为 $\tilde{\mu}$. 于是根据(4.13)式，有

$$\tilde{\mu}=\tilde{\alpha}(\bar{r})=\alpha_{ij\cdots k}x^i\mathrm{d}x^j\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k. \tag{4.60}$$

现在我们定义一些函数：

$$\beta_{j\cdots k}(x^1,\ \cdots,\ x^n)=\int_0^1 t^{p-1}\alpha_{ij\cdots k}(tx^1,\ tx^2,\ \cdots,\ tx^n)x^i\mathrm{d}t. \tag{4.31}$$

这个积分是沿着坐标系中的径向线积的，而 $\{x^i\}$ 碰巧也在其上. 这些函数定义了一个 $(p-1)$ 次形式 $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta}=\beta_{j\cdots k}\tilde{\mathrm{d}}x^j\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^k,$$

而此时我们能作出 $\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}$ 的论断.

直接的代数演算就能证明这一点. 从(4.45)式，有

$$(\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta})_{ij\cdots k}=p\frac{\partial}{\partial x^{[i\beta_{j\cdots k]}}}. \tag{4.62}$$

容易求得导数为:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\beta_{j\cdots k}=\int_0^1 t^{p-1}\alpha_{ij\cdots k}(tx^1,\ \cdots,\ tx^n)\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^1 t^p x^l\alpha_{lj\cdots k,i}(tx^1,\ \cdots,\ tx^n)\mathrm{d}t. \qquad (4.63)$$

为了对指标 $[ij\cdots k]$ 斜对称化，我们(首次)求助于 $\tilde{\alpha}$ 的封闭性:

$$0=\alpha_{[lj\cdots k,i]}=\alpha_{l[j\cdots k,i]}-\alpha_{[j|l|\cdots k,i]}-\alpha_{[kj\cdots|l|,i]}-\alpha_{[ij\cdots k],l}, \qquad (4.64)$$

这里,符号"| |"表示其中的指标不在由"[ ]"所斜对称化的范围之中. 但是, $\tilde{\alpha}$ 的分量对它的所有指标已是斜对称了,所以最初的 p 项是一样的. 因此我们有

$$0=p\alpha_{l[j\cdots k,i]}-\alpha_{[ij\cdots k],l}. \qquad (4.65)$$

将此代入 (4.63) 式斜对称后所得到的表达式的第二个积分之中,并把所得结果代入(4.62)式,就有

$$(\tilde{d}\tilde{\beta})_{ij\cdots k}=\int_0^1[pt^{p-1}\alpha_{ij\cdots k}(tx^1,\ \cdots,\ tx^n)$$
$$+t^p x^l\alpha_{ij\cdots k,l}(tx^1,\ \cdots,\ tx^n)]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^p\alpha_{ij\cdots k}(tx^1,\ \cdots,\ tx^n)]\mathrm{d}t$$
$$=\alpha_{ij\cdots k}(x^1,\ \cdots,\ x^n). \qquad (4.66)$$

定理证毕.

***习　题　4.17**

证明方程式(4.64)和(4.65).

习　题　4.18

应用局部恰当定理证明: 在三维欧几里得向量运算中,一个无旋的向量场局部地是一个梯度,而一个无散的向量场局部地是一个散度.

这里有两点注意事项要提一下. 第一点是,如 4.18 节已提

过的，我们构造的形式 $\tilde{\beta}$ 并不是唯一满足 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}=\tilde{\alpha}$ 的 $(p-1)$ 次形式. 第二点是，我们仅给出了闭形式是恰当形式的一个充分条件. 上同调理论揭示了许多更复杂的流形，在其上闭形式仍然是恰当的(参见4.24节).

4.20 形式的李导数

我们将证明 p 次形式 $\tilde{\omega}$ 关于向量场 $\bar{V}$ 的李导数的下列有用的表达式：

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}=\tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{V})]+(\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\omega})(\bar{V}). \qquad (4.67)$$

即 p 次形式 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ 是两个 p 次形式的和. 第一项是 $\tilde{\omega}(\bar{V})$ ($\tilde{\omega}$ 与 $\bar{V}$ 的缩并)的外微分；第二项是 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\omega}$ 与 $\bar{V}$ 的缩并. 证明相当长，初读时可以跳过去. (4.67)式的结果有很自然的地方：$\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ 是包含 $\bar{V}$ 和 $\tilde{\omega}$ 的一个 p 次形式；如果(4.67)式的左边能通过 $\tilde{\mathrm{d}}$ 来构造的话(这是我们所料想到的，因为李导数和外微分仅涉及到该流形的微分结构)，那么(4.67)式的左边必与我们从 $\bar{V}$, $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\mathrm{d}}$ 三者仅能构成的两个 p 次形式有关. 事实上正是它们的和.

用归纳法来证明. 为了简洁起见，我们在本节的下面部分中省略符号上面的"～"标记.

证明先对 $\tilde{\omega}$ 是零次形式，即一个函数 f 进行. 此时 f 与 $\bar{V}$ 的缩并根据定义是零，而 f 的外微分为 $\mathrm{d}f$. 若 $\bar{V}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$，则我们有 $\mathrm{d}f(\bar{V})=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. 但是这也等于 $\mathscr{L}_{\bar{V}}f=\bar{V}(f)=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. 这就在最简单的情况下，证明了(4.67)式.

接下来要对一次形式 ω 进行证明. 我们采用分量记号：

$$\omega(\bar{V})=\omega_i V^i \Rightarrow \mathrm{d}[\omega(\bar{V})]=(\omega_i V^i)_{,j}\mathrm{d}x^j$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}(\omega_i\mathrm{d}x^i)=(\mathrm{d}\omega_i)\wedge\mathrm{d}x^i\\&=\omega_{i,j}\,\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i=\omega_{i,j}(\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i-\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j)\\&\Rightarrow(\mathrm{d}\omega)(\bar{V})=\omega_{i,j}[\mathrm{d}x^j(\bar{V})\mathrm{d}x^i-\mathrm{d}x^i(\bar{V})\mathrm{d}x^j]\end{aligned}$$

$$=\omega_{i,j}V^j\,\mathrm{d}x^i-\omega_{i,j}V^i\,\mathrm{d}x^j.$$

把这些表达式结合起来，就有

$$\mathrm{d}[\omega(\bar{V})]+\mathrm{d}\omega(\bar{V})=[\omega_{i,j}V^j+\omega_jV^j_{,i}]\mathrm{d}x^i,$$

从(3.14)式可知，这就是 $\mathscr{L}_V\omega$.

再用归纳式进行余下的证明. 因为一般的 p 次形式可以表达为一些项（每一项是一个函数与 p 个一次形式楔积的乘积）的一个和式，即

$$\omega=\frac{1}{p!}\,\omega_{i\cdots k}\mathrm{d}x^i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k,$$

所以对于能写成

$$\omega=fa\wedge b \tag{4.68}$$

的形式去证明该定理就已经足够了. 根据归纳法，我们假定 a 与 b 都能使(4.67)式成立，于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_V\omega&=(\mathscr{L}_Vf)a\wedge b+f(\mathscr{L}_Va)\wedge b+fa\wedge(\mathscr{L}_Vb)\\&=\mathrm{d}f(\bar{V})a\wedge b+f\{\mathrm{d}[a(\bar{V})]+(\mathrm{d}a)(\bar{V})\}\wedge b\\&\quad+fa\wedge\{\mathrm{d}[b(\bar{V})]+(\mathrm{d}b)(\bar{V})\}.\end{aligned}$$

但是我们又已知（如果 a 是一个 p 次形式）：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\omega(\bar{V})]&=\mathrm{d}[fa(\bar{V})\wedge b+(-1)^pfa\wedge b(\bar{V})]\\&=\mathrm{d}f[(a\wedge b)(\bar{V})]+f\{\mathrm{d}[a(\bar{V})]\wedge b\\&\quad+(-1)^{p-1}a(\bar{V})\wedge\mathrm{d}b\\&\quad+(-1)^p\,\mathrm{d}a\wedge b(\bar{V})+a\wedge[\mathrm{d}b(\bar{V})]\},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)(\bar{V})&=[\mathrm{d}f\wedge a\wedge b+f\mathrm{d}a\wedge b+(-1)^pfa\wedge\mathrm{d}b](\bar{V})\\&=\mathrm{d}f(\bar{V})a\wedge b-\mathrm{d}f\wedge[(a\wedge b)(\bar{V})]\\&\quad+f[\mathrm{d}a(\bar{V})\wedge b+(-1)^{p+1}\mathrm{d}a\wedge b(\bar{V})\\&\quad+(-1)^pa(\bar{V})\wedge\mathrm{d}b+a\wedge\mathrm{d}b(\bar{V})].\end{aligned}$$

于是把这两个结果相加，就能得出 $\mathscr{L}_V\omega$ 的表达式(4.67). 这就证明了该表达式对于一般形式都成立.

4.21 李导数和外微分的可换性

(4.67) 式的一个非常重要的推论是李导数与外微分可换(参见 (4.69) 式下面的叙述). 为了证明这一点, 注意对于任意形式 ω(为简洁起见, 也省略"~"记号), 因为 $\mathrm{dd}\omega=0$, 所以有

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}[(\mathrm{d}\omega)(\bar{V})].$$

但是, 再用一次李导数公式, 就有

$$(\mathrm{d}\omega)(\bar{V})=\mathscr{L}_{\bar{V}}\omega-\mathrm{d}[\omega(\bar{V})].$$

因此, 又一次因为 $\mathrm{dd}=0$, 就能得到

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\mathscr{L}_{\bar{V}}\omega). \tag{4.69}$$

李导数与外微分可换! 事实上, 这是 d 的一个更为基本性质的一个特殊情况而已. 对这一专题的更详细的讨论能得出这一性质, 也即存在 d 与该流形的任意可微映射可交换的根据. (在证明习题 3.9 最后第二部分时, 应用这一可换性就容易多了!)

4.22 斯托克斯定理

我们现在能够证明外微分和积分是彼此相逆的. 因为在 n 维流形上形式的积分只对 n 次形式定义的, 所以逆性质只适用于 $(n-1)$ 次形式的外微分. 而且, 因为只定义了 n 次形式的定积分(即积分给出一个数, 而不是另一个形式), 所以类似于方程 (4.43)(出现在本章 B 部分的开始)的逆关系, 必须把 n 次形式 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\omega}$ 的积分与另一个积分, 即 $\tilde{\omega}$ 的积分关联起来. 但是 $(n-1)$ 次形式 $\tilde{\omega}$ 只能在一些 $(n-1)$ 维超曲面上积分, 因此我们就自然地去寻求一个定理, 它把 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\omega}$ 在一个有限区域上的积分与 $\tilde{\omega}$ 在该区域的边界(它是 $(n-1)$ 维的)上的积分联系起来. 然而, 我们证明这个定理(下面的等式 (4.75))的方法是有点间接的, 这是为了避免通常的一些证明中所包含的冗长计算. 我们将先考察因

积分区域略微改变时，该积分值的改变(考虑到一阶)．

因此，让我们来考察一个 n 次形式 $\tilde{\omega}$ 在 n 次流形 M 的一个区域 U 上的积分．设 U 有一个光滑可定向的边界，记为 ∂U．这指的是 M 的一个 $(n-1)$ 维可定向子流形，它把 $M-\partial U$ 分为两个不相交的集合 U 和 CU(U 的补集)，使得连接 U 中的一点和 CU 中的一点的任意连续曲线必须包括 ∂U 的一个点．为简单起见，我们假定 ∂U 是连通的，虽然这一点并不是必要的．图 4.10 给出了一些例子．现设 $\bar{\xi}$ 是 M 上的任意向量场，且考虑由该积分区域(不是形式 $\tilde{\omega}$)受到一个沿 $\bar{\xi}$ 的李拉曳后，引起的变化．因此，原来的区域通过沿 $\bar{\xi}$ 移动一个参数距离 ϵ 以后，就有一族区域 $U(\epsilon)$ 和一族边界 $\partial U(\epsilon)$，而 $U=U(0)$ 及 $\partial U=\partial U(0)$．图 4.11 说明了这一点．

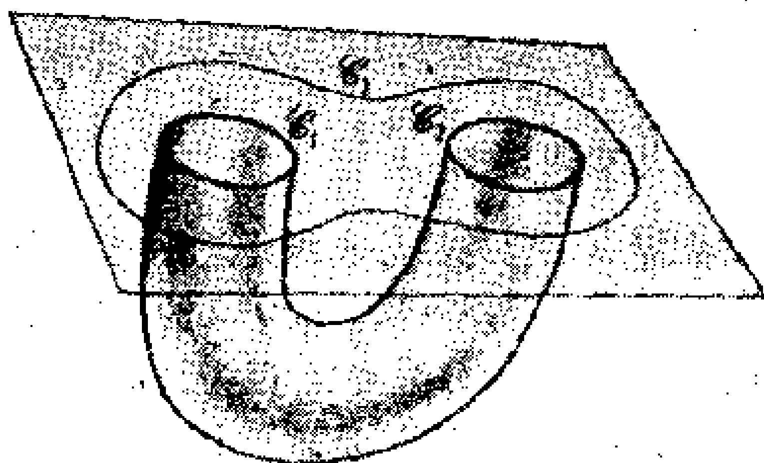


图 4.10 具有"环柄"的流形 M．曲线 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 单独都不是边界，因为它们不能把 M 分成"内部"和"外部"．并集 $\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ 是一个由不连通子流形构成的边界．与之相反，$\mathscr{C}_3$ 是一个连通边界．

由此引起的 $\tilde{\omega}$ 的积分的改变就是 $\delta U(\epsilon)$ 上的积分，即两边界之间区域上的积分：

$$\int_{U(\epsilon)}\tilde{\omega}-\int_{U(0)}\tilde{\omega}=\int_{\delta U(\epsilon)}\tilde{\omega}. \tag{4.70}$$

我们将计算这个积分．设 V 是 ∂U 上的一个坐标片，坐标为

$\{x^2, x^3, \cdots, x^n\}$. 通过沿 ξ 的李拉曳，我们对满足在其中 ξ 不与 ∂U 相切的任意坐标片 V 在 M 中的一个邻域，构造坐标 $\{x^1=\epsilon, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$（参见图 4.12）. 这就对 $V=V(0)$ "上"的，在 $\partial U(0)$ 与 $\partial U(\epsilon)$ 之间的区域 $\delta V(\epsilon)$，定义和提供了一个坐标系. 我们先计算 $\tilde{\omega}$ 在这一区域上的积分，然后再把它推广到整个 $\delta U(\epsilon)$ 上面.

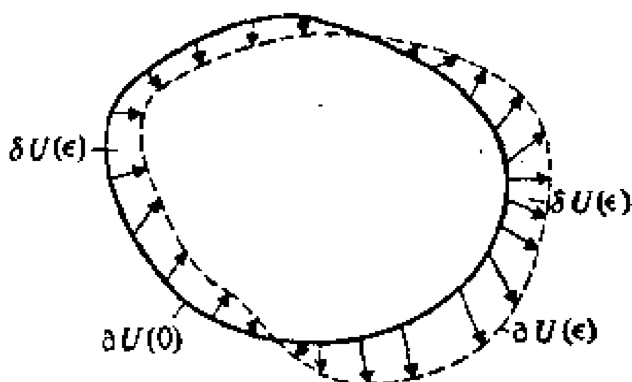


图 4.11 通过沿着 ξ 的积分曲线位移一个参数距离 ϵ，$U=U(0)$ 形变为 $U(\epsilon)$. 图中的箭号表示了向量 $\epsilon\xi$（当 ϵ 很小时）. ∂U 与 $\partial U(\epsilon)$ 之间的区域是 $\delta U(\epsilon)$.

在我们的坐标下，有

$$\tilde{\omega}=f(x^1, \cdots, x^n)\tilde{d}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^n.$$

如果 ϵ 很小†，$\tilde{\omega}$ 的下述积分为

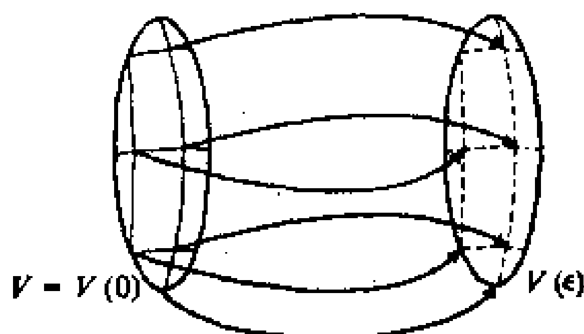


图 4.12 ∂U 的一个坐标片 V 的邻域的一个坐标系，在 V 中 ξ 恒不与 ∂U 相切. 区域 $\delta V(\epsilon)$ 由 ξ 的穿过 V 的那些积分曲线上的，并与 V 的参数距离 $\leqslant\epsilon$ 的所有点所构成的.

$$\begin{aligned}\int_{\delta V(\epsilon)}\tilde{\omega} &=\int_{V(0)}\left[\int_0^\epsilon f\,dx^1\right]\times dx^2\cdots dx^n\\ &=\epsilon\int_{V(0)}f(0, x^2, \cdots, x^n)\times dx^2\cdots dx^n+o(\epsilon)\\ &=\epsilon\int_V \tilde{\omega}(\xi)\Big|_{\partial U}+o(\epsilon).\end{aligned}\tag{4.71}$$

最后一行的得出是基于(4.13)式以及 $\partial/\partial x^1=\xi$ 这一事实.

等式 (4.71) 并不依赖于我们所构造的坐标，但它要求在 V

† 记号 $o(\epsilon)$ 表示，当 $\epsilon\to0$ 时满足 $g(\epsilon)/\epsilon\to0$ 的任意函数 $g(\epsilon)$.

中 ξ 不应与 ∂U 相切. 故此式显然能运用于 ∂U 的任意区域, 只要它的边界由其上 ξ 与 ∂U 相切的点所构成. 若这些点构成 ∂U 的具有较低维数的子流形(如图 4.11 所示), 那么它们不会引起问题. 它们正好把 ∂U 分割成不同的区域 $V(i)$, 而对其中每一区域(4.71)式都成立. 另一方面, 若在 ∂U 的一个开区域中, ξ 与 ∂U 相切, 则此时李拉曳简单地把这一区域映为自身, 并且根本不改变 $\tilde{\omega}$ 的积分, 因此(4.71)式仍成立, 且式子两边都为零. 所以, 我们能把 (4.71)式应用在整个 ∂U 上, 把它与(4.70)式结合起来, 给出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{U(\epsilon)}\tilde{\omega}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\int_{U(\epsilon)}\tilde{\omega}-\int_{U(0)}\tilde{\omega}\right]=\int_{\partial U}\tilde{\omega}(\xi)\Big|_{\partial U}. \tag{4.72}$$

现在, 我们从该区域沿 ξ 的李拉曳的构成, 来推得 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\epsilon)\int\tilde{\omega}$ 的另一表达式. 在任意新的点上, 被积函数与原被积函数的差为 $\epsilon\mathscr{L}_\xi\tilde{\omega}+o(\epsilon)$, 所以我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{U(\epsilon)}\tilde{\omega}=\int_{U(0)}\mathscr{L}_\xi\tilde{\omega}. \tag{4.73}$$

但是(4.67)式给出的 $\mathscr{L}_\xi\tilde{\omega}$ 的表达式, 在此时特别简单, 这是因为 $\mathrm{d}\tilde{\omega}$ 是一个$(n+1)$次形式, 故而恒等于零. 因此我们有

$$\int_U\mathscr{L}_\xi\tilde{\omega}=\int_U\tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\xi)].$$

把这一结果与我们以前给出的 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\epsilon)\int_U\tilde{\omega}$ 的表达式结合起来, 我们就得到**散度定理**(下一节的叙述使我们明白为什么要起这样的名称):

$$\int_U\tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\xi)]=\int_{\partial U}\tilde{\omega}(\xi)\Big|_{\partial U}. \tag{4.74}$$

现在因为 $\tilde{\omega}$ 和 ξ 是任意的, 故而 $\tilde{\omega}(\xi)$ 就是一个任意的 $(n-1)$

形式. 因此我们就能把 (4.74) 式写成对定义在 M 上的任意 $(n-1)$ 次形式 $\tilde{\alpha}$ 所应满足的**斯托克斯定理**:

$$\int_U \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = \int_{\partial U} \tilde{\alpha}, \tag{4.75}$$

当然在上式右边, 我们必须把 $\tilde{\alpha}$ 限制在 ∂U 上.

如图 4.11 那样, 设 M 是二维的, 我们容易看出, (4.75) 式就是欧几里得向量运算中我们所熟知的斯托克斯定理. 于是设 $\tilde{\alpha}$ 是一个一次形式, $\tilde{\alpha}=\alpha_i \mathrm{d}x^i$, $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}=(\alpha_{i,j}-\alpha_{j,i})\tilde{\mathrm{d}}x^j \otimes \tilde{\mathrm{d}}x^i$. 把 $\tilde{\alpha}$ 限制在 ∂U 上意味着仅允许它作用在 $\bar{l}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 上, 即曲线 ∂U 的一个切向量上. 于是我们有

$$\int (\alpha_{1,2}-\alpha_{2,1})\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 = \oint_{\partial U} \alpha_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \oint_{\partial U} \alpha_i\,\mathrm{d}x^i.$$

这就是通常的斯托克斯定理.

4.23 高斯定理和散度的定义

斯托克斯定理还包含向量演算中通常所谓的高斯定理. 作为例子, 回到 (4.74) 式, 在 M 的某一个区域 W 中考虑坐标, 使得 $\tilde{\omega}=\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n$. 于是 $\tilde{\omega}$ 与 $\bar{\xi}$ 的缩并是

$$\tilde{\omega}(\bar{\xi}) = \xi^1\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n - \xi^2\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^3\cdots\tilde{\mathrm{d}}x^n \pm\cdots, \tag{4.76}$$

且

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{\xi})] &= \xi^1{}_{,1}\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n \\ &\quad + \xi^2{}_{,2}\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^3\wedge\cdots\tilde{\mathrm{d}}x^n + \cdots = \xi^i{}_{,i}\tilde{\omega}.\end{aligned}$$

类似于欧几里得几何, 我们定义向量场 $\bar{\xi}$ 的 "**$\tilde{\omega}$ 散度**" 为

$$(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{\xi})\tilde{\omega} \equiv \tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{\xi})]. \tag{4.77}$$

如果在 4.22 节所定义的 ∂U 的坐标片 V 中, 我们仍使用使得 ∂U 是 x^1 为常数的曲面的那种坐标, 那么 $\tilde{\omega}(\bar{\xi})$ 在 ∂U 上的**限制**再一

次为

$$\tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U}=\xi^1\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n=\tilde{\mathrm{d}}x^1(\xi)\tilde{\mathrm{d}}x^2\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n.$$

更一般地，若 $\tilde{n}$ 是一个垂直于 ∂U 的一次形式（即在与 ∂U 相切的任意向量 $\bar{\eta}$ 上，有 $\tilde{n}(\bar{\eta})=0$），且若 $\tilde{\alpha}$ 是使得

$$\tilde{\omega}=\tilde{n}\wedge\tilde{\alpha}$$

的任意$(n-1)$次形式，那么我们得到 $\tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U}=\tilde{n}(\xi)\tilde{\alpha}|_{\partial U}$. 这使(4.74)式具有下列形式：

$$\int_U(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{\xi})\tilde{\omega}=\int_{\partial U}\tilde{n}(\bar{\xi})\tilde{\alpha}, \tag{4.78}$$

其中 $\tilde{\alpha}$ 限制在 ∂U 上，且 $\tilde{n}\wedge\tilde{\alpha}=\tilde{\omega}$. 如果使(4.76)式成立的坐标系覆盖整个 U，那么这就是

$$\int_U\xi^i{}_{,i}\mathrm{d}^nx=\oint_{\partial U}\xi^in_i\mathrm{d}^{n-1}x, \tag{4.79}$$

这是 R^n 中高斯定理的通常表达式.

习 题 4.19

虽然(4.78)式定义的 $\tilde{\alpha}$ 不是唯一的，但试证一旦 $\tilde{n}$ 给定，则限制 $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ 是唯一的. 证明 $\tilde{n}$ 可以确定到标度变换 $\tilde{n}\to f\tilde{n}$，这里 f 是任意处处不为零的函数. 且证明在确定到 $\tilde{\alpha}|_{\partial U}\to f^{-1}\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ 下是唯一的. 由此得出 $\tilde{n}(\bar{\xi})\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ 是唯一的结论.

如果有度规，那么在我们关于 $\bar{\xi}$ 的散度的定义中，$\tilde{\omega}$ 的任意性这一点就可以通过使用度规体积元（4.13 节）予以消除. 这样做会形成符号上的不确定性，但(4.34)式表明 $\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{\xi}$，事实上是与此符号无关的. (4.79)式表明 R^n 中的通常散度使用形式 $\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n$，它正是欧几里得度规的度规体积元.

习 题 4.20

如果选取坐标使得 $\tilde{\omega}=f\tilde{\mathrm{d}}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^n$，那么试从(4.77)式证明

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \vec{\xi} = \frac{1}{f}(f\xi^i)_{,i}. \tag{4.80}$$

习　题　4.21

在三维欧几里得空间中，好体积三次形式是 $\tilde{\omega}=\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$. 证明在球极坐标中，$\tilde{\omega}=r^2\sin\theta\tilde{d}r\wedge\tilde{d}\theta\wedge\tilde{d}\phi$. 应用(4.80)式证明向量

$$\vec{\xi}=\xi^r\partial/\partial r+\xi^\theta\partial/\partial\theta+\xi^\phi\partial/\partial\phi$$

的散度是 $\operatorname{div}\vec{\xi}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\xi^r)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\xi^\theta)+\frac{\partial\xi^\phi}{\partial\phi}$.

习　题　4.22

在流体动力学(以及在物理学的其他许多分支)中，我们讨论连续性方程. 用通常的张量演算形式可以把该方程写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{V})=0.$$

这里 ρ 是质量密度(或其他守恒量)，而 $\vec{V}$ 是其流量率. 按习题 4.21 定义 $\tilde{\omega}=\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$，且应用共动时间求导算子 $(\partial/\partial t+\mathscr{L}_{\vec{V}})$ (这在第五章中将要详细讨论)，试证该连续性方程可表为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_{\vec{V}}\right)(\rho\tilde{\omega})=0.$$

这就使得我们可以把 $\rho\tilde{\omega}$ 看作为流体上的动力学守恒体积三次形式. 这里对任意流体元指定的"体积"是这一元的质量.

习　题　4.23

(a) 由(4.77)式证明向量 $\vec{\xi}$ 的散度还可以表示为

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\vec{\xi}={}^*\tilde{d}{}^*\vec{\xi}, \tag{4.81}$$

这里的"*"运算是早先引入的关于 $\tilde{\omega}$ 的对偶.

(b) 对于任意 p 次向量 $\mathbf{F}$，定义

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\mathbf{F}=(-1)^{n(p-1)}{}^*\tilde{d}{}^*\mathbf{F}. \tag{4.82}$$

证明 $\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\mathbf{F}$ 是一个 $(p-1)$ 次向量. 若在某一坐标系中 $\tilde{\omega}$ 有分量 $\epsilon_{i\cdots j}$，试证用这些坐标时，有

$$(\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\mathbf{F})^{i\cdots j}=F^{ki\cdots j}{}_{,k}. \tag{4.83}$$

(c) 把(4.80)式推广到 p 次向量.

习　题　4.24

(a) 在球面 S^2 上，试应用斯托克斯定理证明：一个二次形式 $\tilde{\omega}$ 是恰当的(即它是另一形式的外微分)必要条件是

$$\int_{S^2}\tilde{\omega}=0.$$

(提示：S^2 无边界.)

(b) 证明定义在 R^3 上的下列二次形式：

$$\tilde{\omega}=x^1\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3,$$

当在单位球面 S^2(作为 R^3 的子流形)上积分时，其值为

$$\int_{S^2}\tilde{\omega}\Big|_{S^2}=\frac{4}{3}\pi.$$

(提示：考虑 $\tilde{d}\tilde{\omega}$ 在 R^3 中是什么?) 因为 S^2 上的任意二次形式都是闭的(为什么?)，这就证明了，在 S^2 上不是每一个闭二次形式都是恰当的.

(c) 证明 S^2 上的每一个闭一次形式 $\tilde{\beta}$ 都是恰当的. (提示：在 S^2 的一部分上对 $\tilde{d}\tilde{\beta}$ 积分).

*4.24　对上同调理论的简短讨论

上面的习题 4.24 说明了，如何应用斯托克斯定理来研究一个流形的那些决定闭和恰当形式之间关系的整体性质. 设 $Z^p(M)$是 M 上所有闭 p 次形式(所有满足 $\tilde{d}\tilde{\alpha}=0$ 的 $\tilde{\alpha}$) 的集合，又设 $B^p(M)$是 M 上所有恰当 p 次形式(所有满足 $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$ 的 $\tilde{\alpha}$)的集合. 这两个集合都是实数上的向量空间，例如说，若 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 是闭 p 次形式，则对于任意实数 a 和 b，$a\tilde{\alpha}+b\tilde{\beta}$ 也是闭的. 事实上，因为 $\tilde{d}\tilde{d}\tilde{\beta}\equiv0$，所以 B^p 是 Z^p 的一个子空间，我们现在来说明如何把 $Z^p(M)$分解为关于 mod $B^p(M)$的等价类. 对于形式 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$，如果它们的差是 $B^p(M)$ 中的一个元素：

$$\tilde{\alpha}_1\approx\tilde{\alpha}_2\Leftrightarrow\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2=\tilde{d}\tilde{\beta}. \tag{4.84}$$

那么称 $\tilde{\alpha}_1$ 与 $\tilde{\alpha}_2$ 是等价的(记作 $\tilde{\alpha}_1\approx\tilde{\alpha}_2$). $\tilde{\alpha}_1$ 的等价类是由所有

与它等价的闭形式组成的集合. 由所有等价类构成的集合称为 M 的第 p 阶德雷姆上同调向量空间,并记作 $H^p(M)$.

*习 题 4.25

(a) 对于关系 $\approx$, 如果它具有下列性质: (i) 对于任意 $\tilde{\alpha}$, 有 $\tilde{\alpha}\approx\tilde{\alpha}$; (ii) 若 $\tilde{\alpha}\approx\tilde{\beta}$, 则 $\tilde{\beta}\approx\tilde{\alpha}$; (iii) 若 $\tilde{\alpha}\approx\tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\beta}\approx\tilde{\gamma}$, 则 $\tilde{\alpha}\approx\tilde{\gamma}$. 这时我们称这一关系为等价关系. 证明(4.84)式确实定义了一个等价关系.

(b) 若 Z^p 是任意的向量空间, 而 B^p 是它的一个子空间, 那么我们已定义的等价类的集合称为 Z^p 关于 B^p 的商空间, 并记作 Z^p/B^p. 证明 Z^p/B^p 是向量空间. (你必须定义等价类的加法,证明并应用下列结果: 若 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$ 分别是等价类 A_1 和 A_2 中的元素,则 A_1 中任意元与 A_2 中任意元之和在 $\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2$ 的等价类中.)

(c) 考察向量空间 R^2, 以及由具有 $(a, 0)$ 形式的所有 (即 a 可取任意实数) 向量构成的子空间 R^1_x, 证明 R^2/R^1_x 是平行 x 轴的直线汇.

现在我们可把 4.19 节的结果转述为: 对于 n 维中的开球或与它微分同胚的任意区域 U, 对 $p\geqslant 1$ 有 $H^p(U)=0$, 这是因为此时所有闭 p 次形式都彼此等价, 故等价于零 p 次形式. 也容易计算 $H^0(U)$, 或者说事实上是对任意连通流形 M 计算 $H^0(M)$. 一个零形式正是一个函数, 因此 $Z^0(M)$ 是满足 $\tilde{d}f=0$ (即常值函数) 的函数 f 所构成的空间. 很简单, 这就是 R^1. 而且, 由于不存在 (-1) 次形式这种数学对象, 故空间 $B^0(M)$ 正是零函数空间. 因此等价关系 $\approx$ 就正是通常的代数相等: 常数 f 和 g 是等价的 $(f\approx g)$, 当且仅当它们是相等的 $(f=g)$. 所以 $H^0(M)=Z^0(M)=R^1$. 如果 M 不是一个连通的流形, 那么 $Z^0(M)$ 中的一个函数只需要在 M 的每一个连通分支中为常数, 而在不同的分支中可以有不同的值. 于是 $H^0(M)=Z^0(M)=R^m$, 这里 m 是 M 中分支的个数.

习题 4.24 的结果显然能推广到任意维数中去，且有 $H^n(S^n)\neq 0$((b) 部分)，以及 $H^{n-1}(S^n)=0$((c) 部分). 它们是下列一般结果的特殊情况:

$$\begin{aligned} &H^n(S^n)=R^1, \\ &H^p(S^n)=0,\ 0<p<n, \\ &H^0(S^n)=R^1. \end{aligned} \tag{4.85}$$

(4.85) 式的证明及其他许多有趣结果的证明可以在 Spivak (1970, Volume 1) 中找到. 在该书有关上同调理论的许多应用中，有所谓的固定点定理: 对于偶数 n，球面 S^n 没有一个处处不为零的向量场.

*习 题 4.26

对于奇数 n，在 S^n 上找一个处处不为零的向量场. (提示: 把 S^{2m+1} 看成是 R^{2m+2} 中的一个子流形，且考察对应于 $SO(2m+2)$ 的矩阵

$$T=\operatorname{diag}(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{m+1})$$

在 S^{2m+1} 上转动的结果，这里每一个 A_j 都是与 j 无关的 2×2 矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

证明在 S^{2m+1} 上，与由映射的单参数子群所生成的线汇相切的向量场 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta$，是处处不为零的.)

*习 题 4.27

(a) 推广习题 4.24(b) 的结果，证明: 在 R^n 上定义的 $(n-1)$ 次形式

$$\tilde{\omega}=\epsilon_{ij\cdots k}x^i\tilde{\mathrm{d}}x^j\wedge\cdots\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^k, \tag{4.86}$$

当限制在由 $(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2=1$ 定义的球面 S^{n-1} 上时，是处处不为零的.

(b) 证明 $H^{n-1}(S^{n-1})=R^1$ 意味着: 若 $\tilde{\alpha}$ 是 S^{n-1} 上的任意 $(n-1)$ 次形式，则 $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}$ 是恰当的，其中

$$a=\int_{S^{n-1}}\tilde{\alpha}\Big/\int_{S^{n-1}}\tilde{\omega}.$$

(c) 用取这个关系式的对偶的方法证明：若 f 是 S^{n-1} 上的任意函数，则它总可以表示为 $f=c+\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V}$ 的形式，这里 c 是某一常数，而 $\bar{V}$ 是 S^{n-1} 上的某一向量场。

(d) 对于圆周 S^1，通过构造一个函数 f（使得 $\tilde{\mathrm{d}}f=\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}$），如上述(b)中那样，证明 $H^1(S^1)=R^1$。

*习　题　4.28

(a) 假定 M 上的一个一次形式 $\tilde{\alpha}$，对于 M 中任意闭曲线 $\mathscr{C}$，具有 $\int_{\mathscr{C}}\tilde{\alpha}=0$ 的性质。证明 $\tilde{\alpha}$ 是恰当的，即存在一个函数 f，使得 $\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}f$。

(b) 对于连通流形 M，如果其上的每一根闭曲线都可以光滑地收缩为一个点，那么称它为单连通的。证明 M 是单连通的充要条件是 $H^1(M)=0$。

在结束对上同调理论的讨论以前，我们还要提出两点简短的评注。首先，$H^p(M)$的维数称为 M 的 p 阶贝蒂数。其次，虽然我们对 $H^p(M)$ 的定义依赖该流形的微分结构，但是上同调理论的最基本定理之一（德雷姆定理）断言：上同调群仅与 M 的拓扑结构有关，而与它的可微性无关。进一步的讨论请参看 Warner(1971)。

4.25 微分形式和微分方程

在 4.17 节中我们讨论了一个例子，它表明外微分与可积条件有着自然的关系。这个例子也表明，至少对于一阶偏微分方程，有一种自然的方式可将这些方程表示为形式之间的关系。这种做法是很重要的，所以在这里我们对此进一步开展讨论。

考察方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,\ y),$$

重写为

$$\mathrm{d}y=f(x,\ y)\mathrm{d}x. \tag{4.87}$$

在一个以 x 和 y 为坐标的二维流形上，我们指望能写出下列一次形式方程：

$$\tilde{d}y - f\tilde{d}x = 0, \qquad (4.88)$$

其中，f 现在是 M 上的一个函数. 这个方程表示什么意思？当然在这个流形上，一次形式 $\tilde{d}y$ 和 $\tilde{d}x$ 是线性无关的，因此(4.88)式实际上不是真实的：它不是一个恒等式. 但是，我们并不指望它是一个恒等式. (4.88)式起源于(4.87)式，而后者只是在解的"增量" dy 和 dx 之间存在的一个关系. (4.87)式的解是具有形式 $y=g(x)$ 的一个关系，它定义了 M 中的一条曲线(或至少是一条道路)：M 中的一个一维子流形. 与这一子流形相切的向量具有与 $f(x, y)$ 相等的斜率 dy/dx. 在某一 P 点考虑这样的一个向量 $\bar{V}$，分量为 $(1, f(P))$. 对于这样的一个向量，

$$\tilde{d}y(\bar{V}) = f(P),$$

以及 $\tilde{d}x(\bar{V}) = 1$. 所以(4.88)式的一次形式在 $\bar{V}$ 上为零：

$$(\tilde{d}y - f\tilde{d}x)(\bar{V}) = 0.$$

这是(4.88)式的意义所在：原微分方程的解定义了 M 的一些子流形，而它们的切向量零化了(4.88)式所表示的形式. 当(4.88)式限制在这一些子流形上时，它是成立的. 反之，如果存在一些子流形，它们的切向量零化(4.88)式，那么这些子流形是(4.87)式的解. 自然，不会只有一个解流形，而有一族解流形，它们彼此之间的区别，例如说可以由在某一固定点 $x=x_0$ 处解 y 的"初始值"(或等价地，由(4.87)式解中的任意积分常数)来给出.

我们当然能把这一形象化的说明推广. 任意给定的形式(不必是一次形式)集合在任意点 P 定义了 T_P 的一个能零化这些形式的子空间. 这些形式的一个解(或与其相伴的微分方程的一个解)是把这些小切子空间紧密配合在一起而构成的子流形. 有关这种配合是否可能的问题，显然与第三章中所证明的

弗罗比纳斯定理有关．在下一节中，我们将用形式的语言来重新表述这一定理．

然而，对于物理学家而言，通常的首要问题是寻找形式的集合(或一个集合)，使它与一个给定的微分方程组等价．在习题 4.32 中，我们有一个例子，其中的方程都是一阶的．下列二阶谐振子方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{4.89}$$

给出了一个较为复杂的例子．这里为了方便起见，把 ω 取为常数．为了用形式的语言来表达这一方程，我们把它写成下列两个一阶方程组：

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\omega^2x.$$

于是找一个能零化下列形式

$$\tilde{\alpha}\equiv\tilde{d}x-y\tilde{d}t,\ \beta\equiv\tilde{d}y+\omega^2x\tilde{d}t$$

的子流形，显然等价于解(4.89)式．此时整个流形是三维的，坐标为 $(x,\ y,\ t)$．解子流形是一维的，因为零化 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 相当于在该流形的任意点对这些向量加上了两个限制条件．在参考文献中所引的 Estabrook(1976)和 Harrison & Estabrook(1971)的两篇论文中，读者可以找到另一些具有启发性的例子．我们现在转向对这些方程解的存在性的问题的讨论．

4.26 弗罗比纳斯定理(微分形式表述)

现在我们回到有关流形上微分演算的最重要定理之一上来．在 3.7 节中，我们已给出了这个定理的李导数表述形式．为了把它用微分形式表达出来，我们首先需要一些定义．任意次数的形式的一个集合 $\{\tilde{\beta}_i\}$ 在每一点 P 处定义了 T_P 的一个向量

子空间 X_P: X_P中的每一向量零化所有的 $\tilde{\beta}_i$. X_P 称为 $\{\tilde{\beta}_i\}$ 在 P 处的**零化子**. $\{\tilde{\beta}_i\}$ 在 P 处的**完全理想**指的是 P 处所有限制于 X_P 时为零的形式. (注意: 若 $\tilde{\gamma}$ 是 P 处的任意形式, 则当把 $\tilde{\gamma}\wedge\tilde{\beta}_i$ 限制在 $\tilde{\beta}_i$ 的零化子上时它为零, 因此它是完全理想中的元素.)任何这种完全理想都能由线性无关的一次形式构成的一个集合 $\{\tilde{\alpha}_j\}$ **生成**, 这指的是 $\{\tilde{\alpha}_j\}$ 的完全理想与 $\{\tilde{\beta}_i\}$ 的完全理想一致. 习题 4.29 构造了这样的一个生成元集合.

习　题　4.29

设$\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$是 X_P 的一个基. 然后用任意其他向量集合 $\{\bar{e}_{m+1}, \cdots, \bar{e}_n\}$ 来扩充它, 使之成为 T_P 的一个基. 证明对偶基一次形式 $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \cdots, \tilde{\omega}^n\}$ 生成完全理想. 证明: 此理想中的任意形式, 对于某一 $\{\tilde{\gamma}^i\}$, 可表示为 $\sum_{i=m+1}^{n}\tilde{\gamma}^i\wedge\tilde{\omega}^i$.

习　题　4.30

设 $\{\tilde{\alpha}_j, j=1, \cdots, m\}$ 是由线性无关的一次形式构成的一个集合. 证明: 任意形式 $\tilde{\gamma}$ 在其完全理想中的充要条件是

$$\tilde{\gamma}\wedge\tilde{\alpha}_1\wedge\tilde{\alpha}_2\wedge\cdots\wedge\tilde{\alpha}_m=0. \tag{4.90}$$

上述代数能自然地推广到形式的场上去. 场的集合 $\{\tilde{\beta}_i\}$ 的完全理想仍是一些场的一个集合, 这些场在每一点 P 处都由 $\{\tilde{\beta}_i\}$ 的零化子 X_P 所零化. 如果一个理想, 对其中的每一个 $\tilde{\gamma}$, $\tilde{d}\tilde{\gamma}$ 也属于该理想, 那么称它为**微分理想**. 对于一次形式的一个集合 $\{\tilde{\alpha}_j\}$, 如果每一个形式 $\tilde{d}\tilde{\alpha}_j$ 都在由 $\tilde{\alpha}_j$ 所生成的完全理想之中, 那么称其为**闭的**.

习　题　4.31

(a) 证明一次形式的一个闭集合生成一个微分理想.

(b) 在一个 n 维流形上，证明：由任意 n 个或 $(n-1)$ 个线性无关的一次形式所构成的集合是闭的.

现在可以把弗罗比纳斯定理表述为：设 $\{\tilde{\alpha}_i, i=1, \cdots, m\}$ 是由 n 维流形 M 中的一个开区域 U 上的线性无关一次形式场所构成的一个集合. 那么当且仅当它们是闭的，才存在函数 $\{P_{ij}, Q_j, i, j=1, \cdots, m\}$，使得

$$\tilde{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\tilde{\mathrm{d}}Q_j. \tag{4.91}$$

我们在下一节中证明这一点. 在这以前，让我们先来讨论一下它所具有的意义. 我们要求微分方程组 $\{\tilde{\alpha}_i=0\}$ 的解，而根据 (4.91) 式，这一方程组等价于 $\{\tilde{\mathrm{d}}Q_j=0\}$. 但是后一方程组是容易求解的：$\{Q_j=\text{常数}\}$. 因此函数 $\{Q_j\}$ 是方程组 $\{\tilde{\alpha}_i=0\}$ 的解. 每一组 $\{Q_j\}$ 值都定义了 M 的一个 m 维子流形. 根据定义该子流形的切向量零化 $\{\tilde{\mathrm{d}}Q_j\}$，因此也零化 $\{\tilde{\alpha}_i\}$. 这就给出了弗罗比纳斯定理前面的表述之间的联系. 对一次形式的这一集合是闭的要求，正是对零化它们的向量场要构成一个李代数这一要求的对偶. 这一点我们在下面还要更详细地讨论.

满足 (4.91) 式的形式的集合 $\{\tilde{\alpha}_i\}$ 称为形成曲面的. 现在我们来证明 4.17 节中讨论过的可积条件的充分性. 在那种情况下，流形的维数为 2，而解子流形的维数为 1. 方程

$$\tilde{\alpha}=\tilde{\mathrm{d}}f$$

具有 (4.91) 式的形式. 因此存在函数 f 的充要条件是 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}=0$. 下面还有一个更复杂一点的例子.

习　题　4.32

考虑函数 f 和 g 的下列耦合线性非齐次微分方程组 (x 和 y 是独立变量)：

$$\frac{\partial f}{\partial x}+A_1f+B_1g=C_1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}+A_2f+B_2g=C_2,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}+D_1g+E_1f=F_1, \tag{4.92}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}+D_2g+E_2f=F_2,$$

其中 A_i, B_i, C_i, D_i, E_i 和 $F_i(i=1, 2)$ 都是 x 和 y 的函数. 我们希望确定这一方程组的可积条件.

(a) 在坐标是 (x, y, f, g) 的四维流形 M 中, 我们定义下列两个一次形式:

$$\tilde{\alpha}=\tilde{d}f+f\tilde{A}+g\tilde{B}-\tilde{C},$$
$$\tilde{\beta}=\tilde{d}g+g\tilde{D}+f\tilde{E}-\tilde{F}, \tag{4.93}$$

其中一次形式 $\tilde{A}$ 定义为

$$\tilde{A}=A_1\tilde{d}x+A_2\tilde{d}y, \tag{4.94}$$

对于 $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, …, 也有类似的定义. 证明: 在 M 中求一个二维子流形 $\mathscr{H}$, 使得在 $\mathscr{H}$ 上有 $\tilde{\alpha}_{\mathscr{H}}=\tilde{\beta}_{\mathscr{H}}=0$, 这等价于解(4.92)式.

(b) 根据弗罗比纳斯定理, 若 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ 是闭的, 则存在四个变量 (x, y, f, g) 的函数 U, V, W, X, Y 和 Z, 使得

$$\tilde{\alpha}=W\tilde{d}U+X\tilde{d}V,$$
$$\tilde{\beta}=Y\tilde{d}U+Z\tilde{d}V.$$

证明
$$U(x, y, f, g)=\text{常数},$$
$$V(x, y, f, g)=\text{常数},$$

确定了(4.92)式的一个解.

(c) 根据(b), 解存在的充要条件是二次形式 $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{d}\tilde{\beta}$ 都在 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ 的理想之中. 证明: 这点能成立, 当且仅当:

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{A}+\tilde{B}\wedge\tilde{E}&=\tilde{d}\tilde{B}+\tilde{B}\wedge\tilde{D}+\tilde{A}\wedge\tilde{B}\\&=\tilde{d}\tilde{C}+\tilde{B}\wedge\tilde{F}+\tilde{A}\wedge\tilde{C}=\tilde{d}\tilde{D}+\tilde{E}\wedge\tilde{B}\\&=\tilde{d}\tilde{E}+\tilde{E}\wedge\tilde{A}+\tilde{D}\wedge\tilde{E}\\&=\tilde{d}\tilde{F}+\tilde{E}\wedge\tilde{C}+\tilde{D}\wedge\tilde{F}=0.\end{aligned}$$

(提示: 根据(4.94)式, $\tilde{d}\tilde{A}$ 正比于 $\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y$, 利用这一点会大大简化代数运算.)

(d) 证明: (c)中的一些条件给出(4.92)式的下列可积条件:

$$\frac{\partial A_1}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial x}+B_2E_1-B_1E_2=0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial x}+B_2D_1+A_2B_1-B_1D_2-A_1B_2=0,$$

等等.

关于方程(4.89)式的解的存在性弗罗比纳斯定理能说明些什么呢?回答是简单的:因为三维流形中的任意两个线性无关的一次形式自动地有一个闭理想(参见习题 4.31(b)),所以必存在函数 f, g, h, l, m, n, 满足

$$\tilde{\alpha}=h\tilde{d}f+l\tilde{d}g,$$

$$\tilde{\beta}=m\tilde{d}f+n\tilde{d}g.$$

于是由 $f=$常数、$g=$常数所定义的那些一维子流形零化形式 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$, 因此它们是解子流形.

弗罗比纳斯的这种表述方式,并不直接处理由二次形式或更高次形式构成的形式集合所描述的微分方程组. 这种情况可以作如下处理:如习题 4.29 中那样,求出一次形式的一个集合,它能生成同一完全理想. 这些一次形式并不总是代数等价于原来的集合,也即它们给出的微分方程组可以与原来的微分方程组不等价. 如果是等价的话,就能直接应用弗罗比纳斯定理. 如果不等价的话,那么需要一种更为巧妙的处理方法. 有关的讨论可参看 Choquet-Bruhat *et al.* (1977).

*4.27 弗罗比纳斯定理两种表述的等价性的证明

让我们回忆一下第三章中给出的弗罗比纳斯定理的表述,它在几何上意义更为明显:给定 q 个向量场 $\{\bar{V}_{(i)}, i=1, \cdots, q\}$, 它们在每一点构成一个 p 维向量空间, 那么当且仅当所有的李

括号 $[\overline{V}_{(i)}, \overline{V}_{(j)}]$ $(i, j=1, \cdots, q)$ 都是这 q 个向量场的线性组合时，$\{\overline{V}_{(i)}\}$ 才能紧密配合成一个 p 维超曲面. 而本章给出的表述涉及到形式及它们的外微分的封闭性. 这种描述与用向量以及李括号的封闭性的描述是互为"对偶"的，或"互补的". 这两种描述能对应的关键在于：如果这些向量场在 n 维流形的一点 P 处，定义了 T_P 的一个 r 维子空间的话，那么它们以自然的方式定义了 T_P^* (P 是一次形式的空间)的一个 $(n-r)$ 维子空间，这只要求由这些向量零化的形式构成即可. 相反，利用同样的零化要求，从一组 q 个一次形式便能定义 T_P 的一个 $(n-q)$ 维子空间. 事实上，为了描述一个子流形我们有两种方法：一是在每一点给出 T_P 的一个 r 维子空间，它由与该子流形相切的向量构成；二是给出由这些向量零化的一次形式所构成的 $(n-r)$ 维子空间. 证明弗罗比纳斯定理的这两种表述之间的等价性，可分两步进行.

(1) 在 n 维流形中，考察一个 p 维子流形：存在 $(n-p)$ 个不同函数 $Q_{(k)}$，它们通过 $(n-p)$ 个方程 $Q_{(k)}=$ 常数，(局部地)定义了该超曲面. 根据假定，形式 $\tilde{d}Q_{(k)}$ 都是线性无关的，而且它们都被与该子流形相切的任意向量 $\overline{V}$ 所零化：$\langle\tilde{d}Q_{(k)}, \overline{V}\rangle=0$. 另一方面，该子流形的切空间是一个 p 维向量空间，所以这就定义了一个一次形式的 $(n-p)$ 维子空间，其中每一个一次形式 $\tilde{\beta}$ 都被任一个 $\overline{V}_{(i)}$ 所零化：$\langle\tilde{\beta}, \overline{V}_{(i)}\rangle=0$. 设 $\{\tilde{\alpha}_{(k)}, k=1, \cdots, n-p\}$ 是该子空间中的任意基. 那么显然，形式 $\{\tilde{d}Q_{(k)}\}$ 也是一个基. 因此，任意 $\tilde{\alpha}_{(k)}$ 可表为所有 $\tilde{d}Q_{(k)}$ 的一个线性组合，如 (4.40) 式所示. 所以等价性的证明，现在就归结为证明：对向量场的条件，即它们的李括号的封闭性要求，是等价于对形式 $\{\tilde{\alpha}_{(k)}\}$ 的封闭要求.

(2) 这一点的证明可由下列方程着手：

$$\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle=0(i=1, \cdots, n-p;\ j=1, \cdots, p),$$

关于任意 $\bar{V}_{(k)}$，求上式的李导数，则有

$$0=\mathscr{L}_{\bar{V}_{(k)}}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle=\langle\mathscr{L}_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{i}, \bar{V}_{(j)}\rangle+\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \mathscr{L}_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}\rangle,$$

根据对形式求李导数的法则，就有

$$\langle\mathscr{L}_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle=\langle\tilde{\mathrm{d}}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(k)}\rangle, \bar{V}_{(j)}\rangle+\langle\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}), \bar{V}_{(j)}\rangle.$$

因为根据定义 $\tilde{\alpha}_{(i)}$ 被 $\bar{V}_{(k)}$ 零化，所以第一项为零，而第二项正是 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)})$，即 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}_{(i)}$ 在原集中两个向量上的值. 现在，如果 $\mathscr{L}_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}$ 是某些 $\bar{V}_{(i)}$ 的线性组合，那么它零化 $\tilde{\alpha}_{(i)}$，并且我们也有 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}_{(i)}$ 被 $\{\bar{V}_{(j)}\}$ 零化. 所以，$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}_{(i)}$ 在理想之中，而且这些李括号的封闭性就意味着这些形式的封闭性. 反之，容易看出，这些形式的封闭性(这意味着 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)})=0$)意味着这些李括号的封闭性.

*4.28 守恒定律

对于微分方程，探讨守恒定律的一个特别好的途径是由形式提供的. 假定求解一组微分方程等价于求一个能零化某一组形式 $\{\tilde{\alpha}_i\}$ 的曲面。再假定存在 $\{\tilde{\alpha}_i\}$ 的一个线性组合，即形式 $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma}=A_1\tilde{\alpha}_1+\cdots,$$

满足:

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\gamma}=0.$$

于是存在另一个形式 $\tilde{\sigma}$，使得在解曲面 H 的一个适当区域 U 中，有

$$\tilde{\gamma}=\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma},$$

以及

$$\tilde{\gamma}|_H=\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}|_H=0. \tag{4.95}$$

在 H 的区域 U 上，对 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}$ 积分，并应用斯托克斯定理，则有

$$\int_U\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}=\oint_{\partial U}\tilde{\sigma}.$$

但是根据(4.95)式，这个积分在解曲面的区域 U 的边界上应为零：

$$\oint_{\partial U}\tilde{\sigma}|_H=0.$$

这是一类积分守恒定律．我们就谐振子的情况来说明这一点．

此时 (4.95) 式的解曲面是一维的一些曲线，因此形式 $\tilde{d}\tilde{\sigma}$ 必定是一个一次形式，而 $\tilde{\sigma}$ 事实上就是一个零次形式(一个函数)．因为 $\tilde{d}\tilde{\sigma}$ 与 $\tilde{\gamma}$ 相等，考察下列形式(符号与以前一样 (4.25 节))：

$$\tilde{\gamma}=\omega^2x\tilde{\alpha}+y\tilde{\beta},$$

容易证明

$$\tilde{d}\tilde{\gamma}\equiv 0. \tag{4.96}$$

而事实上，

$$\tilde{\gamma}=\tilde{d}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2\right). \tag{4.97}$$

于是在一条解曲线上，有 $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}=0$, 因此有 $\tilde{\gamma}=0$, 所以

$$\tilde{d}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2\right)=0,$$

$$0=\int\tilde{d}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2\right)=\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2\right)\Big|_{p_1}^{p_2}.$$

这里 p_1 和 p_2 是积分曲线的区域的端点．这个结果表明了能量 $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2$ 在解曲线上为一常数．

这种处理法也可以用于具有孤立子解的那些方程，有兴趣的读者可以参考 Estabrook & Wahlquist (1975) (见参考文献)．

***习　题　4.33**

证明等式(4.96)和(4.97)．

*4.29 向量球谐函数

在这一节中，我们继续讨论 3.18 节中的球谐函数. 当时我们注意到：在 S^2 上的函数空间 $L^2(S^2)$ 中，$SO(3)$ 的一个有限维表示具有基 $\{Y_{lm}, m=-l, \cdots, l\}$. 我们如何对 S^2 上的向量场构造一个有关的基？利用 S^2 上的度规，我们可以给出所有向量场构成的空间一个自然的范数. 在通常的球面坐标下，g| 的分量是 $\{g_{\theta\theta}=1, g_{\phi\phi}=\sin^2\theta, g_{\theta\phi}=0\}$. 如果我们设 $\tilde{\omega}$ 是 S^2 上的，由该度规诱导产生的体积形式(4.13 节)，那么空间 $L^2_{1,0}(S^2)$ 是 S^2 上所有向量场 $\bar{V}$ 所构成的向量空间，它的范数

$$\|\bar{V}\|^2=\int_{S^2} \mathrm{g}|(\bar{V}, \bar{V})\tilde{\omega} \tag{4.98}$$

是有限的. 我们要求的是 $L^2_{1,0}(S^2)$ 中的向量场，它们是 $\bar{l}_z$ 和 L^2 的本征函数.

我们应用下面两个事实：首先 g|，因此 $\tilde{\omega}$ 在 $\bar{l}_z$ 和 L^2 下不变；其次外微分与李导数可交换. 从函数 Y_{lm} 出发，我们构造一次形式 $\tilde{d}Y_{lm}$，并由后者构造向量 $\bar{\nabla}Y_{lm}$，它的分量(指标 A, B 取遍 1 和 2) 为

$$(\bar{\nabla}Y_{lm})^A=g^{AB}(Y_{lm})_{,B}. \tag{4.99}$$

显然这也是 $\bar{l}_z$ 和 L^2 的一个本征函数：

$$\mathscr{L}_{\bar{l}_z}\bar{\nabla}Y_{lm}=im\bar{\nabla}Y_{lm}, \tag{4.100a}$$

$$L^2(\bar{\nabla}Y_{lm})=-l(l+1)\bar{\nabla}Y_{lm}. \tag{4.100b}$$

但是我们不能有了一种向量谐函数就停止了，因为我们必须张成一个二维向量空间. 这里我们要用一下下列事实：(在二维流形上)我们有另一种方式从一个向量构造一个一次形式，即对偶运算. 因此我们还有 $^*\tilde{d}Y_{lm}$. 后者当然也是一个本征函数.

*习 题 4.34

证明：$\tilde{\nabla} Y_{lm}$ 和 $^*\tilde{d} Y_{lm}$ 在每一点一般是线性无关的.

从3.18节引用过的完备性定理可以得出，向量球谐函数的下列两组集合

$$\bar{Y}^+_{lm} \equiv \tilde{\nabla} Y_{lm}, \qquad (4.101a)$$

$$\bar{Y}^-_{lm} \equiv {}^*\tilde{d} Y_{lm} \qquad (4.101b)$$

组成表示二维球上的向量的一个完备集合.

顺着这一思路还可以深入下去，定义二阶张量球谐函数. 然而，这将使我们涉及尚未讨论过的球面上的协变导数(参看第六章). 有兴趣的读者可以参阅参考文献中列出的 Reggo & Wheeler(1957) 的论文.

注意，我们只是讨论了球面上的标量和向量. 大部分应用涉及到一些具有球对称性的较大流形（球面是它们的子流体）. 作为一个简单的例子，考察三维欧几里得空间 E^3. E^3 上的函数可以展开成级数 $\sum f_{lm}(r) \times Y_{lm}$，而该函数对 r 的依赖性完全包含在 $\{f_{lm}\}$ 之中. E^3 上的向量场 $\bar{V}$ 可以分解为两个场：

$$\bar{V} = \bar{V}_\perp + V_T,$$

这里 $\bar{V}_\perp$ 垂直于球面（平行于 $\bar{e}_r$），而 $\bar{V}_T$ 与球面相切. 如果我们把 $\bar{V}_\perp$ 表成 $v\bar{e}_r$，这里 v 是一个函数，那么在一个转动下，v 象球面上的一个标量函数那样变换，而 $\bar{V}_T$ 象球面上的向量那样变换. 因此，必须用向量球面调和函数来展开 $\bar{V}_T$，而用标量球面调和函数来展开 v.（许多作者把这些标量乘以 $\bar{e}_r$，并把所得的集合称为第三类向量球谐函数.）在第五章 E 部分中考察一些宇宙模型时，我们将用到这些内容.

向量球谐函数还有另外一些表述方式，初看起来，它们与我

们这里使用的定义没有什么关系．它们是用群论的代数方法来定义的(参见 Edmonds, 1957)． 我们在这里提出的方法，应用于微分方程组是适宜的，因为在微分方程组中很自然有我们所使用的导数。

4.30 参考文献

E．嘉当关于微分形式的观点非常清晰地陈述在下列文献中：

E. Cartan, *Les Systemes Differentials Exterieurs et Leurs Applications Geometriques* (Hermann, Paris, 1945).

比上叙书更详尽，且有很多物理学和工程方面应用的优秀导引书是：

H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (Academic Press, New York, 1963).

对读者数学要求不高，且用现代方法讨论的书是：

M. Schreiber, *Differential Forms: a Heuristic Introduction* (Springer, Berlin, 1977).

对形式严格的和高水平的讨论，请参考：

Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette & M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977).

关于在不可定向流形上斯托克斯定理的讨论，以及它在明显不存在磁单极这一问题中的应用，请参考：

R. Sorkin, *J. Phys. A* **10**, 717 (1977).

关于上同调理论的深入讨论，可参考：

M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Boston, 1970), vol. 1;

F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Scott, Foresman, Glenview, Ill. (1971).

关于形式在研究微分方程结构中的应用，可参考：

F. B. Estabrook & H. D. Wahlquist, Prolongation structure of nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **16**, 1(1975);

F. B. Estabrook & H. D. Wahlquist, The geometric approach to sets of ordinary differential equations and Hamiltonian dynamics, *SIAM Review* **17**, 201(1975);

B. K. Harrison & F. B. Estabrook, Geometric approach to invariance groups and solutions of partial differential systems, *J. Math. Phys.* **12**, 653 (1971);

F. B. Estabrook, Some old and new techniques for the practical use of exterior differential forms in *Bäcklund Transformation*, ed. R. N-Miura, Lecture notes in mathematics, no. 515(Springer-Verlag, Heidelberg, 1976).

关于向量球谐函数有许多不同的阐述方式．这一方面的标准参考书是：

A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, 1957).

关于把我们的方法推广到张量上去，可参考：

T. Regge & J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063(1957).

关于张量球谐函数，可以参考：

D. A. Akyeampong, *J. Math. Phys.* **20**, 505–8(1979);

E. T. Newman & R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7**, 863 (1966).

第五章 物 理 应 用

A 热 力 学

5.1 简单体系

我们先考察单一成分的流体,其能量守恒方程为

$$\delta Q = P\mathrm{d}V + \mathrm{d}U, \tag{5.1}$$

这里 U 是流体的内能, δQ 是当该流体做功($P\mathrm{d}V$)及能量改变时所吸收的热量. 我们可将这一方程解释为坐标为(V, U)的二维流形上一些一次形式之间的一个关系式, 而且在这个流形上定义了函数 $P(V, U)$(称为状态方程). 因为 $\tilde{\mathrm{d}}V$ 和 $\tilde{\mathrm{d}}U$ 都是一次形式,所以 δQ 也是一次形式. 但是 $\tilde{\delta}Q$ 是不是一个恰当一次形式呢?也即我们是否能找到一个函数 $Q(V, U)$, 使得 $\tilde{\delta}Q = \tilde{\mathrm{d}}Q$ 呢?如果能找到的话,那么我们必有 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}Q=0$,这意味着

$$0 = \tilde{\mathrm{d}}P \wedge \tilde{\mathrm{d}}V = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_U \tilde{\mathrm{d}}V + \left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}U\right] \wedge \tilde{\mathrm{d}}V$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}U \wedge \tilde{\mathrm{d}}V.$$

(求导符号的下标表明求偏导时固定的变量.)因此, 仅当$(\partial P/\partial U)_V$ 处处为零时, 函数 Q 才能存在, 但这确实是一种奇特的流体.

因为 $\tilde{\delta}Q$ 是二维空间中的一个一次形式, 它的理想自动就是闭的. 因此由弗罗比纳斯定理(4.26 节), 必存在函数 $T(U, V)$和 $S(U, V)$,满足 $\tilde{\delta}Q = T\tilde{\mathrm{d}}S$. 这样,我们对处于热力学平衡中的单一成分的气体定义的温度和熵函数, 简单地就是为了表

示(5.1)式中的一次形式而引入的：

$$T\tilde{d}S=P\tilde{d}V+\tilde{d}U. \tag{5.2}$$

这是 T 和 S 的纯数学定义，它与我们马上要考察的热力学第二定律没有关系. 了解这一点是很重要的. 对于多成分的流体，不存在这一类的任何数学恒等式.（我们将看到，对于复合体系而言，热力学第二定律等价于 $\tilde{\delta}Q=T\tilde{d}S$ 这一要求. 因为这不是一个必然的恒等式，所以第二定律就是一个物理定律：它限制了物理体系的可能数学性质.）

5.2 麦克斯韦恒等式和其他数学恒等式

取(5.2)式的外微分，有

$$\tilde{d}T\wedge\tilde{d}S=\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V. \tag{5.3}$$

假定我们命 $T=T(S, V)$，$P=P(S, V)$. 那么(5.3)式给出(因为 $\tilde{d}S\wedge\tilde{d}S\equiv0$，$\tilde{d}V\wedge\tilde{d}V\equiv0$)：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S\tilde{d}V\wedge\tilde{d}S=\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V\tilde{d}V\wedge\tilde{d}S.$$

由此，我们得到

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \tag{5.4}$$

这是麦克斯韦恒等式之一. 类似地，命 $S=S(T, V)$，$P=P(T, V)$，我们就能推出

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \tag{5.5}$$

这是另一个麦克斯韦恒等式. 把(5.2)式除以 T，然后再取外微分，我们就有

$$\frac{1}{T}\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V-\frac{P}{T^2}\tilde{d}T\wedge\tilde{d}V-\frac{1}{T^2}\tilde{d}V\wedge\tilde{d}U=0.$$

若命 $U=U(T, V)$，$P=P(T, V)$，我们就有

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tilde{d}T\wedge\tilde{d}V-\frac{P}{T^2}\tilde{d}T\wedge\tilde{d}V-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\tilde{d}T\wedge\tilde{d}V=0,$$

或

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P=\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \qquad (5.6)$$

习 题 5.1

用 $1/P$ 乘(5.2)式，再求导，推导下列恒等式：

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S-P=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_T-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_S. \qquad (5.7)$$

应用形式容易得出的另一个重要关系是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T=-1, \qquad (5.8)$$

对(P, V, U, T, S)中的任意三个量都有同样的等式．为了证明(5.8)式，可命

$$T=T(P, S),\ S=S(T, P),\ P=P(T, S), \qquad (5.9)$$

这是可能的，因为流形是二维的．于是我们有下列一些恒等式：

$$\tilde{d}T\wedge\tilde{d}S=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\tilde{d}P\wedge\tilde{d}S=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T$$

$$=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T,$$

由此有(5.8)式．注意，这里的推导仅依赖于能写出(5.9)式．因此，它确实是二维流形上的任意三个函数之间的一个恒等式．

应用形式极容易导出麦克斯韦恒等式及(5.8)式．这说明形式是描述热力学的一种自然的手段：一次形式 $\tilde{d}P$, $\tilde{d}S$ 等以精确的数学概念代替了 dP, dS 等被物理学家采用的，较为模糊的无穷小量的概念．

5.3 复合热力学体系：凯雷瑟多里定理

现在我们来考虑复合热力学体系，它的各部分之间彼此可交换能量，也能与外界交换能量．此时，(对于一个由 N 个部分组成的体系来说)能量守恒定律为

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta}Q &= P_1\tilde{d}V_1+\tilde{d}U_1+P_2\tilde{d}V_2+\tilde{d}U_2+\cdots \\
&=\sum_{i=1}^{N}(P_i\tilde{d}V_i+\tilde{d}U_i).
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

我们把(5.10)式看成是坐标为(V_i, U_i; $i=1$, …, N)的一个 $2N$ 维流形上的一次形式之间的一个关系．而且我们假定每一个 P_i 都可以表示为这些坐标的一个函数．于是下列问题就产生了：能否定义整个体系的熵和温度，即是否存在 T 和 S，使得

$$
\tilde{\delta}Q=T\tilde{d}S. \tag{5.11}
$$

这一等式正好表示 $\tilde{\delta}Q$ 是可积的(在弗罗比纳斯定理的意义下)．现在弗罗比纳斯定理告诉我们，(5.11)式成立的充要条件是 $\tilde{d}\tilde{\delta}Q\wedge\tilde{\delta}Q=0$．从(5.6)式容易看出，这一般是不正确的．因此结论是：对一般的相互作用体系来说，不存在整体的温度或熵函数．但对于平衡体系，情况会有所不同，因为组分之间的力学平衡和热力学平衡条件将把(我们假定的)问题限制在 $2N$ 维流形的一个子流形上．从现在起，我们用的"流形"这一词，指的就是这一平衡子流形，并且从凯雷瑟多里的观点来考察 $\tilde{\delta}Q$ 在其上可积的可能性．

如果 $\tilde{\delta}Q$ 是可积的，那么该流形上的每一点在且仅在一个积分子流形上，这些子流形由 $S=$ 常数所定义．这些曲面是互不相交的．所以，从一点出发，不可能沿着一条 δQ 在其上是处处为零的曲线到达该流形上的任意一点．换言之，如果有一个熵函数存在的话，那么就不能沿着一条平衡的绝热线到达体系

的每一个平衡态．物理学上重要的问题是，其逆命题是否也正确：如果我们知道并不是每一个态都可以沿通过在其上 $\delta Q=0$ 的路径达到，那么能否说 $\tilde{\delta}Q$ 是可积的？这个问题是有意思的．因为热力学第二定律的一种说法断言：在一个封闭体系中，把热从一个较冷的物体传递给一个较热的物体而不引起其他的变化是不可能的．所谓封闭体系指的是 $\delta Q=0$ 的体系．因此第二定律告诉我们，并不是任意状态都可以由 $\delta Q=0$ 达到的．那么第二定律是否意味着存在一个熵函数？凯雷瑟多里定理回答说：确实如此．

我们要证明的是，若 $\tilde{\delta}Q$ 不可积，则某一初始点 P 的邻域中的所有点，都可以从 P 通过一条零化 $\tilde{\delta}Q$ 的曲线达到．因为 $\tilde{\delta}Q$ 是不可积的，所以根据 4.26 节中给出的弗罗比纳斯定理的表述，我们知道至少存在两个向量场 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$，在任意点 P 的一个邻域中满足 $\tilde{\delta}Q(\bar{V})=\tilde{\delta}Q(\bar{W})=0$，但在 P 点，$\tilde{\delta}Q([\bar{V},\bar{W}])\neq 0$，也即一次形式 $\tilde{\delta}Q$ 在每一点 P 定义了 T_P 的一个子空间 K_P，其中的向量零化 $\tilde{\delta}Q$．$\tilde{\delta}Q$ 的非可积性意味着，向量场在 K_P 中处处不构成一个超曲面：它们的李括号中至少有一个不在 K_P 中（参见图 5.1）．因为零化 $\tilde{\delta}Q$ 只有一个方程，所以 K_P 的维数为 $n-1$，这里 n 是平衡流形的维数．现在回想一下 2.13 节中对泰勒级数引入的指数映射概念．如果我们取在所有点 P 都在 K_P 中的任意向量场 U，而且我们从 P 沿它移动一个参数距离 ϵ，我们就到达坐标为 $x^i=\exp(\epsilon\bar{U})x^i|_P$ 的点，其中我们把 U 作为作用在沿曲线的函数 x^i 上的一个求导算子．P 点的一个小邻域中，能用这种方法到达的所有点的集合可以记作 $\exp(\epsilon K_P)$：它

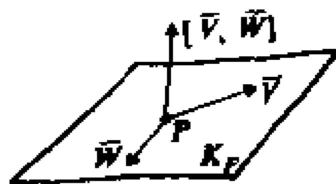


图 5.1　切超平面 K_P 包含零化 $\tilde{\delta}Q$ 的向量，但并不包含它们在 P 点的所有李括号．

是向量空间 K_P 在该流形中的表示．点的这个集合局部上象一片$(n-1)$维超曲面．我们将证明：沿着我们上面定义的 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 的曲线，我们可以到达这一"超曲面"的"上部"或"下部"的点，即我们可以达到邻近 P 的所有点．我们取的路径如下：首先沿 $\bar{V}$ 移动一距离 ϵ，然后沿 $\bar{W}$ 移动 ϵ，再沿 $\bar{V}$ 移动 $-\epsilon$，最后沿 $\bar{W}$ 移动 $-\epsilon$．这使我们到达（参见(2.6)式）

$$x^i = e^{-\epsilon W} e^{-\epsilon V} e^{\epsilon W} e^{\epsilon V} x^i|_P = (1 + \epsilon^2 [\bar{W}, \bar{V}] + O(\epsilon^3)) x^i|_P. \tag{5.12}$$

这表示我们最后又几乎回到了 P，但与 P 还差一个参数距离 ϵ^2（沿$[\bar{V}, \bar{W}]$）．因为$[\bar{V}, \bar{W}]$不在 K_P 中，所以这一点不在 $\exp(\epsilon K_P)$中，它在 $\exp(\epsilon K_P)$的一侧．为了能在另一侧，我们可先沿 $\bar{W}$，然后沿 $\bar{V}$ 移动．现在，我们的路径处处沿着 $\bar{V}$ 或 $\bar{W}$，因此这路径是绝热的：处处有 $\delta Q=0$．所以显然的是，若 δQ 不是可积的，则该体系的所有态都可以通过绝热途径到达．这就证明了：热力学第二定律要求 $\tilde{\delta}Q$ 在平衡流形中的可积性，以及对一个处于平衡的复合系统要求有一个熵函数存在．

B 哈密顿力学

5.4 哈密顿向量场

动力学方程组的哈密顿表述是以某一动力学变量 $q(t)$的拉格朗日函数 $\mathscr{L}(q, q_{,t})$为出发点的．动量 p 定义为

$$p = \partial\mathscr{L} / \partial(q_{,t}), \tag{5.13}$$

而哈密顿函数 H 定义为

$$H = pq_{,t} - \mathscr{L} = H(p, q). \tag{5.14}$$

动力学方程及 p 的定义可分别写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_{,t}}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}=0, \tag{5.15}$$

和

$$\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, 及 \frac{\partial H}{\partial p}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{5.16}$$

我们现在来定义一个称为"相空间"的流形 M(其坐标为 p 和 q),从而给出哈密顿动力学一个几何图象. 在 M 上,我们定义二次形式

$$\tilde{\omega}\equiv\tilde{\mathrm{d}}q\wedge\tilde{\mathrm{d}}p. \tag{5.17}$$

考虑 M 上给出(5.16)式解的一条曲线$\{q=f(t),\ p=g(t)\}$. 曲线的切向量是 $\bar{U}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t=f_{,t}\partial/\partial q+g_{,t}\partial/\partial p$,它具有性质

$$\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega}=0, \tag{5.18}$$

我们将证明这一点. 因为 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\omega}=0$,我们从(4.67)式得到

$$\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega}=\tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{U})]. \tag{5.19}$$

但是因为 $\tilde{\omega}=\tilde{\mathrm{d}}q\otimes\tilde{\mathrm{d}}p-\tilde{\mathrm{d}}p\otimes\tilde{\mathrm{d}}q$,我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\bar{U})&=\langle\tilde{\mathrm{d}}q,\ \bar{U}\rangle\tilde{\mathrm{d}}p-\langle\tilde{\mathrm{d}}p,\ \bar{U}\rangle\tilde{\mathrm{d}}q\\&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\tilde{\mathrm{d}}p-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,\tilde{\mathrm{d}}q.\end{aligned} \tag{5.20}$$

另一方面,因为 f 和 g 满足(5.16)式,我们有

$$\tilde{\omega}(\bar{U})=\frac{\partial H}{\partial p}\,\tilde{\mathrm{d}}p+\frac{\partial H}{\partial q}\,\tilde{\mathrm{d}}q=\tilde{\mathrm{d}}H. \tag{5.21}$$

所以 $\tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{U})]$为零,(5.18)式得证. 满足(5.18)式的向量场 $\bar{U}$ 称为**哈密顿向量场**.

习 题 5.2

(a) 若 $\bar{U}$ 是一个哈密顿向量场,证明存在某一个 $H(p,\ q)$,使得在 $\bar{U}$ 的一些积分曲线上,满足方程组(5.16).

(b) 证明哈密顿向量场构成一个李代数.

如果 $\tilde{U}$ 是哈密顿函数，那么我们根据习题5.2(a)可把 $\tilde{U}$ 解释为相空间中解曲线的切线．注意，该体系是保守系，因为(5.16)式意味着

$$\mathscr{L}_{\tilde{U}}H=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0. \tag{5.22}$$

5.5 正则变换

坐标 p 和 q 现在都不是唯一的．我们把正则变换定义为使 $\tilde{\omega}$ 保持同一形式的那些变换，即对于新坐标 $P=P(q, p)$ 和 $Q=Q(q, p)$，如果

$$\tilde{\mathrm{d}}q\wedge\tilde{\mathrm{d}}p=\tilde{\mathrm{d}}Q\wedge\tilde{\mathrm{d}}P, \tag{5.23}$$

那么称该新坐标是正则的．上式成立的充要条件是

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right)=1. \tag{5.24}$$

$Q=p$, $P=-q$ 就是这样的一个变换．采用类似于我们在热力学中推导麦克斯韦恒等式所用的步骤，我们可以得出一个不那么平凡的变换．记 $p=p(q, Q)$, $P=P(q, Q)$，从(5.23)式可得

$$\partial p/\partial Q=-\partial P/\partial q. \tag{5.25}$$

如果我们取任意函数 $F(q, Q)$，且定义

$$p=\partial F/\partial q,\ P=-\partial F/\partial Q,$$

那么(5.25)式恒能满足．因此，就称 $F(q, Q)$ 生成一个正则变换．因为我们可以不选 (q, Q)，而选偶 (q, P)，(p, Q)，或 (p, P) 为(5.23)式中的独立变量，所以正则变换的这种生成函数显然有四种类型．在 Goldstein(1950)(参见参考文献)中，对它们有深入的讨论．

5.6 由 $\tilde{\omega}$ 给出的向量和一次形式之间的映射

哈密顿动力学的这种观点的最重要特征之一是使得 $\tilde{\omega}$ 起的

作用类似于度规在黎曼流形上所起的作用：$\tilde{\omega}$ 给出了向量与一次形式之间的一个可逆的 1-1 映射. 如果 $\bar{V}$ 是 M 上的一个向量场，那么可定义一个一次形式场

$$\tilde{V} \equiv \tilde{\omega}(\bar{V}), \tag{5.26}$$

它的分量为

$$(\tilde{V})_i = \omega_{ij} V^j. \tag{5.27}$$

类似地，给定一个一次形式场 $\tilde{\alpha}$，我们能定义一个(唯一的)向量场 $\bar{\alpha}$，使得

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\omega}(\alpha). \tag{5.28}$$

习 题 5.3

证明 $\langle \tilde{V}, \bar{V} \rangle = 0$，因此 $\tilde{\omega}$ 不适宜作为度规。

习 题 5.4

如果 $\tilde{\alpha} = f\tilde{\mathrm{d}}q + g\tilde{\mathrm{d}}p$，证明

$$\bar{\alpha} = g\frac{\partial}{\partial q} - f\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.29}$$

习 题 5.5

证明：$\bar{X}$ 是 M 上的一个哈密顿向量场，当且仅当 $\tilde{X}$ 是一个恰当的一次形式，即当且仅当存在某一函数 H，使得 $\tilde{X} = \tilde{\mathrm{d}}H$，或 $\bar{X} = \overline{\mathrm{d}H}$.

5.7 泊松括号

假定在流形中有两个函数 f 和 g，定义向量场 $\bar{X}_f \equiv \overline{\mathrm{d}f}$ 和 $\bar{X}_g \equiv \overline{\mathrm{d}g}$. 考察标量

$$\{f, g\} \equiv \tilde{\omega}(\bar{X}_f, \bar{X}_g) = \langle \tilde{\mathrm{d}}f, \bar{X}_g \rangle. \tag{5.30}$$

因为 $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}q \otimes \tilde{\mathrm{d}}p - \tilde{\mathrm{d}}p \otimes \tilde{\mathrm{d}}q$，我们有

$$\bar{X}_g = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{5.31}$$

通过验证 $\tilde{\omega}(\overline{X}_g)=\tilde{\mathrm{d}}g$，可以证明上式．因此我们有

$$\{f,\ g\}=\langle\tilde{\mathrm{d}}f,\ \overline{X}_g\rangle=\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

这就是我们通常定义的函数 f 和 g 的泊松括号．(5.30)式的定义使泊松括号有了一种几何意义，而且也表明了泊松括号确实是与坐标无关的，它只与 $\tilde{\omega}$ 有关。

习　题　5.6

(a) 定义 $\overline{X}_H\equiv\overline{\tilde{\mathrm{d}}H}$，证明对于任意函数 K，有

$$\{K,\ H\}=\overline{X}_H(K)=\mathrm{d}K/\mathrm{d}t,\tag{5.32}$$

这里 t 是满足 $\overline{X}_H=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 的参数．这样，一个函数与哈密顿函数的泊松括号给出该函数沿着一条解曲线的时间变化率．尤其是，运动常数与 H 的泊松括号为零．

(b) 对于任意的 C^2 函数 f，g 和 h，证明泊松括号满足雅可比恒等式

$$\{f,\ \{g,\ h\}\}+\{g,\ \{h,\ f\}\}+\{h,\ \{f,\ g\}\}=0。\tag{5.33}$$

(c) 由此证明

$$[\overline{X}_f,\ \overline{X}_g]=-\overline{X}_{\{f,g\}}.\tag{5.34}$$

因此，哈密顿向量场组成一个李代数．

5.8　多粒子体系：辛形式

一般地，我们讨论的体系的自由度大于一，因而有一个以上的 q 和 p．对于在三维空间中运动的粒子而言，就有 3 个 q 和 3 个 p，因此相空间是 6 维的．N 个这种粒子的体系，就有一个 $6N$ 维的相空间．如果我们现在考察一个具有 n 个自由度的一般体系，那么此时相空间就是 $2n$ 维的，而且上述的所有结果都是有效的，只要我们把二次形式 $\tilde{\omega}$ 取为

$$\tilde{\omega}=\sum_{A=1}^{n}\tilde{\mathrm{d}}q^A\wedge\tilde{\mathrm{d}}p_A\tag{5.35}$$

就可以了．这样的 $\tilde{\omega}$ 称为一个**辛形式**，而相空间因之成为一个

辛流形.

习　题　5.7

(a) 如果 $\bar{X}_f=(\widetilde{\mathrm{d}f})$ 是 H 的一个不变量，即 $\bar{X}_f$ 满足

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_f}H=0, \tag{5.36}$$

证明 f 是一个运动常数.（参见习题 5.6.）

(b) 在相空间中定义下列体积形式 $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}=\underbrace{\tilde{\omega}\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}}_{n\text{次}}, \tag{5.37}$$

这里 $2n$ 是该空间的维数. 证明 $\tilde{\sigma}\neq 0$. 再证明哈密顿向量场 $\bar{U}$ 在这一体积测度中是散度为零的. 换言之，相空间中的这一体积在体系随时间的演化过程中保持不变. 这就是所谓的刘维尔定理.

习　题　5.8

现在我们来证明 3.12 节中关于开林向量与守恒量之间关系的一些评述. 对于粒子的运动，相空间中的坐标是 $\{q^A, p_A\}=\{x^i, p_i=mv_i\}$，而哈密顿函数是 $H=(1/2m)g^{ij}p_ip_j+\Phi(x^i)$. 如果 $\bar{U}$ 是一个开林向量，且沿着 $\bar{U}$，ϕ 为常数，试证明此时的共轭动量 $p_U=U^ip_i$ 是一个守恒量.（提示：应用习题 5.7，把 $\bar{X}_f$ 定义为相空间中的空间部分与 U 相等而动量为零的向量场. 证明

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_f}H=0,$$

并从(5.31)式中求出 f.）

5.9　线性动力学体系：辛内积和守恒量

对于线性体系，有简单得多的方法来系统地得出守恒定律. 所谓线性体系，指的是哈密顿函数具有下列形式

$$H=\sum_{A,B=1}^{n}(T^{AB}p_Ap_B+V_{AB}q^Aq^B) \tag{5.38}$$

的动力学体系，其中 T^{AB} 和 V_{AB} 是与 p_A 和 q^A 无关的. 这种体系之所以称为线性的，是因为运动方程组是 $\{q^A, p_A\}$ 的一些线

性方程：

$$\frac{\mathrm{d}p_A}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q^A}=-\sum_B V_{AB}q^B, \tag{5.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}q^A}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_A}=\sum_B T^{AB}p_B. \tag{5.40}$$

注意，我们可取 $T^{AB}=T^{BA}$ 和 $V_{AB}=V_{BA}$. 因为，例如说 T^{AB} 的斜对称部分，当与对称表达式 p_Ap_B 缩并时，对 H 是无贡献的.

体系的线性性保证了：若 $\{q^A_{(1)}, p_{(1)A}\}$ 和 $\{q^A_{(2)}, p_{(2)A}\}$ 是解，则 $\{\alpha q^A_{(1)}+\beta q^A_{(2)}, \alpha p_{(1)A}+\beta p_{(2)A}\}$ 也是解，这里 α 和 β 是任意常数. 因此，这一相空间不仅是一个流形，它还有一个自然的向量空间结构. 向量空间当然是一类流形，因为从它到 R^n 中有一个映射. 但是向量空间是这样的一个流形：它与它每一点上的切空间都是同一的. 这是因为向量空间中的一条曲线是向量的一个序列，该曲线的切线正是沿着该曲线的向量的导数，它就是另一向量，即该向量空间中的另一元素. 一个向量空间是其自身的切空间. 还不至于此：所有的切空间 T_p 彼此都有一个自然的同化. 这样，我们就能定义位于不同 T_p 中的向量相等还是不相等：这只要比较它们的分量是否相等就能办到. (这意味着向量空间是一个平直的流形：参见第六章.)

因为相空间中的一点是一个向量，我们就能用辛形式 $\tilde{\omega}$ 来定义相空间元素之间的一个内积. 如果 $\overline{Y}_{(1)}$ 是分量为 $\{q^A_{(1)}, p_{(1)A}, A=1, \cdots, N\}$ 的向量，$\overline{Y}_{(2)}$ 是分量为 $\{q^A_{(2)}, p_{(2)A}\}$ 的向量，那么定义它们的辛内积为

$$\tilde{\omega}(\overline{Y}_{(1)}, \overline{Y}_{(2)})=\sum_A(q^A_{(1)}p_{(2)A}-q^A_{(2)}p_{(1)A}). \tag{5.41}$$

若 $\overline{Y}_{(1)}(t)$ 和 $\overline{Y}_{(2)}(t)$ 都是解曲线，则它们的辛内积与时间 t 无关. 为了证明这一点，我们只要简单地把运动方程代入 $\mathrm{d}\tilde{\omega}(\overline{Y}_{(1)}, \overline{Y}_{(2)})/\mathrm{d}t$ 的表达式中就可以了(这里要对重复的指标求和)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\omega}(\overline{Y}_{(1)}, \overline{Y}_{(2)})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^A_{(1)})p_{(2)A}+q^A_{(1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{(2)A}$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^A_{(2)})p_{(1)A}-q^A_{(2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{(1)A}$$
$$=T^{AB}p_{(1)B}p_{(2)A}+V_{AB}q^A_{(1)}q^B_{(2)}$$
$$-T^{AB}p_{(1)A}p_{(2)B}-V_{AB}q^A_{(2)}q^B_{(1)}.$$

由 T^{AB} 和 V_{AB} 的对称性，如果 $\overline{Y}_{(1)}(t)$ 和 $\overline{Y}_{(2)}(t)$ 是解的话，那么我们可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\omega}(\overline{Y}_{(1)}, \overline{Y}_{(2)})=0. \tag{5.42}$$

这一辛内积使我们能以优美的方式定义某些与解相联系的守恒量．初看起来，这一点可能并不明显：虽然辛内积是守恒的，但是一个解与其本身的辛内积是恒等于零的．然而有一个诀窍：使用体系的(即 T^{AB} 和 V_{AB} 的)一个不变量，从一个解 $\overline{Y}$ 生成密切与之相关的另一个解．例如，假定 T^{AB} 和 V_{AB} 是与时间无关的，那么运动方程将告诉我们：若 $\overline{Y}(t)$ 是解，则 $\mathrm{d}\overline{Y}/\mathrm{d}t$ 也是解．我们把解 $\overline{Y}$ 的正则能量定义为

$$E_C(\overline{Y})=\tilde{\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{Y}}{\mathrm{d}t}, \overline{Y}\right). \tag{5.43}$$

容易证明 $E_C(\overline{Y})$ 正是哈密顿函数在解 $\overline{Y}$ 上取的值．

另一些守恒量也很容易导出．通常发生的情况是，T^{AB} 和 V_{AB} 与定义动力体系的流形(对于非相对性动力学，是欧几里得空间)的坐标 $\{x^i\}$ 有关．如果象习题 5.8 中一样，存在某一向量场 $\overline{U}$，使得

$$\mathscr{L}_{\overline{U}}T^{AB}=0=\mathscr{L}_{\overline{U}}V_{AB}, \tag{5.44}$$

那就存在一个与 $\overline{U}$ 有关的守恒量．(在计算 $\mathscr{L}_{\overline{U}}T^{AB}$ 时，要注意把表示相空间中的指标 A，B 与 T^{AB} 在原流形上的张量特性区别开来．量 T^{AB} 可能是原流形上的标量或张量，这要视量 q^A 等是标量还是高阶张量而定．上标 A 和 B 是一些标记，在计算

T^{AB} 关于 $\bar{U}$ 的李导数时，它们并不表示 T^{AB} 应该作为一个$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$型张量来处理。这是因为 $\bar{U}$ 是原流形上的一个向量场，而不是相空间中的一个向量场。）如前所述，若 $\bar{Y}$ 是解，则 $\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{Y}$ 也是解。（再提醒一下：这是原流形中的，而不是相空间中的一个导数。）所以我们定义下列（守恒的）正则$\bar{U}$动量：

$$P_{\bar{U}}(\bar{Y})=\tilde{\omega}(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{Y},\ \bar{Y}). \qquad (5.45)$$

读者最好自己演算一个简单的例子（如习题5.8中的那个例子），以证实这样做确实会给出通常的守恒量。

虽然我们一直限于讨论具有有限个 (N) 自由度的一些体系，但是上面的方法能直截了当地推广到连续体系（如波动方程）中去。熟悉克莱因-高登方程的读者可能会认出下列辛内积。守恒的克莱因-高登流密度 $\psi^*\dot{\psi}-\psi\dot{\psi}^*$ 的积分恰好是（精确到一个常数因子）$\tilde{\omega}(\psi^*,\ \psi)$。关于流体中波的正则守恒量的讨论及其在稳定性问题中的应用，读者可以在 Friedman & Schutz (1978)（参见参考文献）中找到有关材料。

*5.10 哈密顿方程的纤维丛结构

在 5.4 节中我们把相空间定义为坐标是 p 和 q 的流形，在这最初的论述中隐藏着大量有趣和重要的结构。假定一个动力学体系，对应于它的自由度 N，有 N 个坐标 $\{q^i\}$。这些坐标定义了一个称之为位形空间的流形 M，而该动力学系随时间的演化可用 M 中的一条曲线 $q^i(t)$ 描述。此时拉格朗日函数 $\mathscr{L}$ 是 q^i 和 $\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$ 的函数，因此是 TM（M 的切丛）上的一个函数。现在我们证明动量

$$p_i=\partial\mathscr{L}/\partial(q^i{}_{,t}) \qquad (5.46)$$

是 M 上的一个一次形式场，即余切丛 T^*M 上的一个截面。我

们将从 p_i 的变换性质来证明这一点. 让我们来定义 M 的新坐标:

$$Q^{j'}=Q^{j'}(q^i). \tag{5.47}$$

于是新的动量就是

$$P_{j'}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial Q^{j'}_{,t}}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^k_{,t}}\frac{\partial q^k_{,t}}{\partial Q^{j'}_{,t}}. \tag{5.48}$$

现在 $q^k_{,t}$ 和 $Q^{j'}_{,t}$ 都是任意点 P 上的纤维中的元素. 而且这一纤维上的坐标经受一个由(5.47)式诱导的自然的变换. 也即, 若 $\overline{V}$ 是 P 点的任意向量,则它的分量的变化为

$$V^{j'}=\Lambda^{j'}_k V^k,\ V^k=\Lambda^k_{j'}V^{j'}.$$

这种变换也适用于速度向量 $q^k_{,t}$:

$$q^k_{,t}=\Lambda^k_{j'}Q^{j'}_{,t}\Rightarrow\frac{\partial q^k_{,t}}{\partial Q^{j'}_{,t}}=\Lambda^k_{j'}.$$

在(5.48)式中代入这一结果,则有

$$P_{j'}=\Lambda^k_{j'}p_k, \tag{5.49}$$

因此动量确实是一个一次形式.

由此可知, 坐标为 $\{q^i,\ p_i\}$ 的相空间只不过是余切丛 T^*M, 而哈密顿函数就是该丛上的一个函数. 还有一点就是辛形式

$$\widetilde{\omega}=\widetilde{\mathrm{d}}q^i\wedge\widetilde{\mathrm{d}}p_i$$

(使用求和规约)是与 M 中的坐标无关的. 对于它,变换是

$$\begin{aligned}&Q^{j'}=Q^{j'}(q^i)\Rightarrow\widetilde{\mathrm{d}}Q^{j'}=\Lambda^{j'}_i\widetilde{\mathrm{d}}q^i,\\&P_{j'}=\Lambda^k_{j'}p_k\Rightarrow\widetilde{\mathrm{d}}P_{j'}=\Lambda^k_{j',l}p_k\widetilde{\mathrm{d}}q^l+\Lambda^k_{j'}\widetilde{\mathrm{d}}p_k.\end{aligned} \tag{5.50}$$

(记住: 算子 $\widetilde{\mathrm{d}}$ 作用在 T^*M 上, 而不是在 M 上, 而且函数 $\Lambda^k_{j'}$ 只是 M 的坐标的函数). 于是我们得到

$$\widetilde{\mathrm{d}}Q^{j'}\wedge\widetilde{\mathrm{d}}P_{j'}=\Lambda^{j'}_i\Lambda^k_{j',l}p_k\widetilde{\mathrm{d}}q^i\wedge\widetilde{\mathrm{d}}q^l+\Lambda^{j'}_i\Lambda^k_{j'}\widetilde{\mathrm{d}}p^i\wedge\widetilde{\mathrm{d}}p_k. \tag{5.51}$$

现在我们还有

$$\Lambda^{j'}_i\Lambda^k_{j'}=\delta^k_i\Rightarrow\Lambda^{j'}_i\Lambda^k_{j',l}=-\Lambda^{j'}_{i,l}\Lambda^k_{j'}.$$

因此(5.51)式变成

$$\tilde{d}Q^{j'} \wedge \tilde{d}P_{j'} = -A^{j'}_{i,l} A^{k}_{j'} p_k \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l + \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_i.$$

其中右边的第一项为零，这是因为

$$A^{j'}_{i,l} = \frac{\partial^2 Q^{j'}}{\partial q^i \partial q^l}$$

对 i 和 l 是对称的，而第一项是 $A^{j'}_{i,l}$ 与斜对称形式 $\tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l$ 的缩并．所以 $\tilde{\omega}$ 是与 M 的坐标无关的，它是余切丛 T^*M 上的一个自然结构．由于习题 5.7(b) 中定义的体积形式 $\tilde{\sigma}$ 是处处不为零的，所以 T^*M 恒是可定向的．

虽然在我们的一些例子中，纤维丛结构是平凡的(即作为 q 空间与 p 空间的乘积)，但明显的是也有可能有非平凡的流形 M 及纤维丛 T^*M，在其中上述的所有与坐标无关的公式只是在局部坐标片中才成立．甚至象一个约束在球面上运动的一颗小珠子这样简单的例子，其相空间都有一个非平凡丛的结构，这我们在 2.11 节中已指出过了．

C 电 磁 理 论

5.11 应用微分形式重新表述麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组在 $c=\mu_0=\epsilon_0=1$ 的单位制中的通常形式为

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{J}, \qquad (5.52a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0, \qquad (5.52b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (5.52c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (5.52d)$$

自然，在写出这些方程时，我们用了通常平直的三维空间中的旋度和散度算子．

我们下面将说明还有一种只使用度规和外微分的概念来写出这些方程的方法。首先我们把(5.52)式写成相对论不变形式†，为此我们先定义法拉第二次形式 $\tilde{F}$，它的分量是

$$(F_{\mu\nu})\equiv\begin{pmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & B_z & -B_y\\ E_y & -B_z & 0 & B_x\\ E_z & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}. \tag{5.53}$$

(这里如2.31节中一样，希腊字母指标遍及 t, x, y, z.)

习 题 5.9

证明在空间转动下，$F_{\mu\nu}$ 的变换方式使得 **E** 和 **B** 都按三维向量变换。

借助于法拉第张量，麦克斯韦方程组有一个特别简单的形式。例如，(5.52b, c)式中的四个方程就是

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]}=0\Leftrightarrow\tilde{d}\tilde{F}=0, \tag{5.54}$$

其中我们使用了方括号，这表示斜对称化。

习 题 5.10

(a) 证明(5.54)式包含四个线性独立的方程。

(b) 从(5.53)式给出的 $\tilde{F}$ 的分量计算(5.54)式，并证明它等价于(5.52b, c)式。

对于剩下的一些方程，如果我们引入在这一坐标系中分量为

---

† 不熟悉这一方面的读者，请回忆一下：麦克斯韦方程组是对于光的正确理论，而创立狭义相对论就是为了解释光的某些性质，因此麦克斯韦方程组已是正确的相对论性的了。我们这里需要做的仅是为这些方程找一个方便的形式。

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

的狭义相对论的度规的话，那么我们就能定义一个斜对称$\binom{2}{0}$型张量 $\mathbf{F}$，它的分量为

$$F^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta},$$

$$(F^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.56}$$

习 题 5.11

证明(5.56)式。

于是剩下的一些方程可表示为

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=4\pi J^{\mu}, \tag{5.57}$$

这里我们已定义了四维向量流，它的分量是 $\{J^t=\rho,\ J^i=(\mathbf{J})^i,$ 对于 $i=x,\ y,\ z\}$。

习 题 5.12

证明(5.57)式的四个方程恰好就是(5.52a～d)式。

至此我们一直坚持使用洛伦兹坐标，这是因为虽则(5.54)式是与坐标无关的，但是(5.57)式并不是一个在任意坐标系中都能成立的张量方程(请回忆一下习题4.15)。另一方

面，我们在习题 4.23 中看到，如果我们有一个体积形式，那就应该如何来定义一个斜对称$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$型张量（二次向量）的散度。因为我们有一个度规，同时因为 $\{\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ 在此度规中构成一个正交归一基，所以好体积形式是

$$\tilde{\omega}=\tilde{\mathrm{d}}t\wedge\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}y\wedge\tilde{\mathrm{d}}z.$$

下面的习题继续我们的讨论。

习　题　5.13

(a) 定义二次形式 $^*\tilde{F}$ 为下列缩并：

$$^*\tilde{F}\equiv\frac{1}{2}\tilde{\omega}(\mathbf{F}), \tag{5.58}$$

即

$$(^*\tilde{F})_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}.$$

自然，这是我们在第四章中引入的 $\mathbf{F}$ 的对偶。试用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 表示$(^*\tilde{F})_{\mu\nu}$的分量。

(b) 用下列缩并定义三次形式 $^*\tilde{J}$，

$$^*\tilde{J}\equiv\tilde{\omega}(\bar{J}), \tag{5.59}$$

证明(5.57)式等价于

$$\tilde{\mathrm{d}}(^*\tilde{F})=4\pi{}^*\tilde{J}. \tag{5.60}$$

根据习题 4.23，这也就是

$$\mathrm{div}_{\omega}\mathbf{F}=4\pi\bar{J}. \tag{5.61}$$

注意，在我们的麦克斯韦方程组的新形式的两部分之间，有极大的形式上的相似：

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F}=0, \tag{5.54}$$

$$\tilde{\mathrm{d}}^*\tilde{F}=4\pi{}^*\tilde{J}. \tag{5.60}$$

还应注意到，它们现在与坐标是完全无关的，因此它们在具有度规（因为从 $\tilde{F}$ 得到 $^*\tilde{F}$ 需要度规）的任何流形之中都有这一形

式. (5.54)式和(5.60)式之间的相似性深藏在麦克斯韦方程组之中. 注意,对 F 进行"*"运算可简单地通过交换 **E** 和 **B** 得到(参见习题 5.13(a)). 还请回忆一下,$\tilde{J}$ 是电流密度. 如果有磁单极的话,我们将有两个流密度 $\tilde{J}_e$ 和 $\tilde{J}_m$,而麦克斯韦方程组将有下列对称的形式:

$$\tilde{d}\tilde{F}=4\pi{}^*\tilde{J}_m,\ \tilde{d}{}^*\tilde{F}=4\pi{}^*\tilde{J}_e. \tag{5.62}$$

习 题 5.14

(a) 证明(5.62)式.

(b) 利用外微分方法证明:方程(5.60)保证了电荷守恒,即

$$\operatorname{div}(\tilde{J})=0. \tag{5.63}$$

习 题 5.15

用下述方法导出对于电荷的积分定理.

(a) 选取任意可定向的三维超曲面 $\mathscr{S}$,并把(5.60)式限制在其上. 证明这一限制与外微分可交换,即

$$\tilde{d}[({}^*\tilde{F})|_{\mathscr{S}}]=(\tilde{d}{}^*\tilde{F})|_{\mathscr{S}}.$$

(b) 选取 $\mathscr{S}$ 的一个区域 $\mathscr{D}$,它的边界为 $\partial\mathscr{S}$. 在 $\mathscr{D}$ 上对(5.60)式的限制积分,再应用斯托克斯定理导出(对于适当的限制而言):

$$\int_{\mathscr{D}}{}^*\tilde{J}=\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\mathscr{D}}{}^*\tilde{F}.$$

(c) 在闵可夫斯基时空中,对于 $\mathscr{S}$ 是由 $t=$常数表示的一个超曲面,而且 $\partial\mathscr{D}$ 是一球面的那种情况,证明:电场的法向分量在 $\partial\mathscr{D}$ 上的积分,给出了 $\mathscr{D}$ 中的总电荷.

5.12 电荷与拓扑

由于我们现在能够在具有度规的任意流形上论述麦克斯韦方程组,我们可以提出两种尝试,它们通过回答"电荷是拓扑"试图来解答"电荷是什么"这一令人困惑的问题.第一种尝试是 J.

A. 惠勒(1962 年)提出的，他的解释是极为简单的. 看一下图 5.2，其中画出了某一假想空间中 $t=$ 常数的一个超曲面. 画出的线是 $\mathbf{E}$ 的积分曲线. 此时电荷密度处处为零，且这些积分曲线或是闭合的(穿过手柄，从一个洞穿出，从另一个洞穿进)或是无限的(虽然它们穿过手柄). 考虑一个实验者，他在环绕某一洞的球面 S 上测量 $\mathbf{E}$. 他将推断出：积分 $\int_S \tilde{F}|_S$ 肯定不为零(在 S 上，$\mathbf{E}$ 全部指向外面)，并将说该洞有正电荷. 同样，环绕另一个洞的一个球面将给出同样大小的负电荷. (习题 5.15 的计算不成立了，因为 S 不能把该流形分成内部和外部，参见图 4.10.)因此这是一个“没有电荷的电荷”的模型，这个模型也附带说明了为什么负电荷与正电荷相等. 但也有两个不足之处：第一，没有人能求得，例如说爱因斯坦方程的解，是如此的时空几何；第二，设想两个可能离得很远，且以它们自己特殊的“手柄”连在一起的电荷，在哲学上来说也许是不能令人满意的.

第二种尝试更为复杂. 它所用到的流形，由于手柄的特殊构造使之不能定向. 这是索金(1977 年)提出来的(参阅第四章的参考文献). 在这个模型中，两个洞具有同样的电荷，因此可

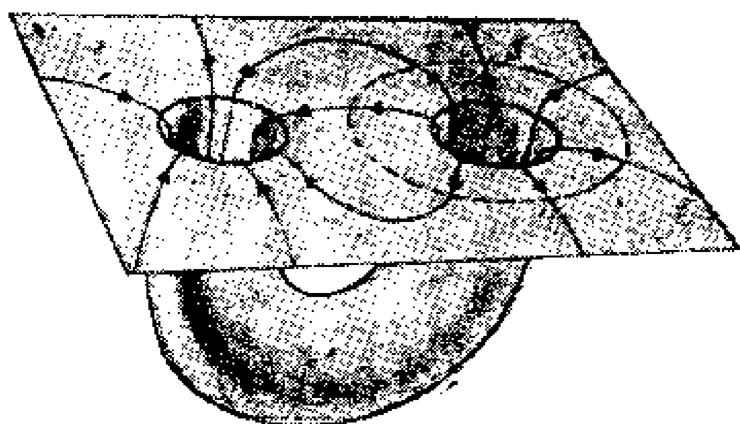


图 5.2 附加在一个三维流形(其中一维没有画出)上的一个“蛀洞”或手柄. 力线可以穿过手柄出来，并再度进去，从而使得每一个“洞口”在一个无电荷的空间中具有电荷的外貌.

以假定它们是紧贴在一起的，从而组成对于外部观察者来说，强度就象是每一个洞的两倍的单个电荷．此时习题5.15已不成立了，因为该流形是不可定向的．这种模型克服了惠勒模型的第二个不足之处，但第一个不足之处仍然存在．而且这两个模型都不能解释为什么两个没有联系的电荷会是相等的．然而，它们阐明了一个越来越变得令人信服的信念：对于理论物理而言，远不止是一些局部微分方程而已！

5.13 矢势

麦克斯韦方程组存在着"矢势"，这一点可以从(5.54)式自然得出．因为 $\tilde{F}$ 是一个闭的二次形式，因此就存在一个一次形式 $\tilde{A}$，使得

$$\tilde{F}=\tilde{d}\tilde{A} \tag{5.64}$$

在任意点的某一邻域中成立．借助于度规可将此一次形式映为一个向量，这就称为矢势．当然，更为自然的概念应是一次形式势．注意，$\tilde{A}$ 不是唯一确定的：对于任意函数 f，定义 $\tilde{A}'=\tilde{A}+\tilde{d}f$，这也给出(5.64)式中的 $\tilde{F}$．这是一个规范变换．还请注意，如果磁单极存在的话，那么 $\tilde{d}\tilde{F}$ 不能处处为零．根据我们在第四章中对恰当形式的讨论，只可以在不包含磁单极的简单区域中定义 $\tilde{A}$．特别是在一个包含磁单极的世界线的时空区域中，就不能处处首尾一致地定义这个一次形式．

习　题　5.16

(a) 证明：若存在一个一次形式势 $\tilde{A}$，那么用非相对论语言来说，它与标势 ϕ 和矢势 A^i 的关系则是，$\phi=A_0$，A^i(矢势) $=-A_i$(一次形式)，这里的指标与(5.52)式的坐标有关．

(b) 求出(a)中定义的 ϕ 和 A^i 在规范变换下将如何变化．

(c) 阐明由磁单极给一次形式势 $\tilde{A}$ 带来的问题．考虑有电荷而无

磁单极的情况，在其中，对于 $^*\tilde{F}$，用等式 $^*\tilde{F}=\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}$ 定义一次形式势 $\tilde{\alpha}$.

（根据在"$*$"运算下电场和磁场之间的对偶，就如 $\tilde{A}$ 对磁一样，$\tilde{\alpha}$ 对电荷具有同样的一些问题.）用 $\tilde{\alpha}$ 写出麦克斯韦方程组，并证明：$\tilde{\alpha}$ 在不含电荷，且能收缩为零的区域中存在．在单个孤立静止电荷 q 的情况中，通过求出 $\tilde{\alpha}$ 的一个明晰的解来证明上述 $\tilde{\alpha}$ 的存在.

5.14 平面波——一个简单的例子

众所周知，平面电磁波以光速传播．考察一个特殊的法拉第张量 $F^{\alpha\beta}$，它的所有分量只是 $u=t-x$ 的函数（回忆我们用的是 $c=1$ 的单位制）：

$$F^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}(t-x)=A^{\alpha\beta}(u). \tag{5.65}$$

这一张量满足真空方程 $\mathrm{d}\tilde{F}=0$ 和 $\mathrm{d}^*\tilde{F}=0$ 的条件是什么？从(5.65)式，我们有

$$\mathrm{d}\tilde{F}=\tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu}\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}\right)=\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{d}}(F_{\mu\nu})\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu}\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}$$

$$=\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{d}}A_{\mu\nu}/\mathrm{d}u)\tilde{\mathrm{d}}u\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu}\wedge\tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}.$$

从(5.53)式容易得出

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_z-E_y)\tilde{\mathrm{d}}t\wedge\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_x)\tilde{\mathrm{d}}t\wedge\tilde{\mathrm{d}}y\wedge\tilde{\mathrm{d}}z\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_x)\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}y\wedge\tilde{\mathrm{d}}z+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_y-E_z)\tilde{\mathrm{d}}t\wedge\tilde{\mathrm{d}}x\wedge\tilde{\mathrm{d}}z\right],$$

由它为零能推出（略去任何静态场）：

$$B_z=E_y,\ B_y=-E_z,\ B_x=0. \tag{5.66}$$

习 题 5.17

证明：从方程 $\tilde{\mathrm{d}}^*\tilde{F}=0$ 能推出：

$$B_z=E_y,\ B_y=-E_z,\ E_x=0. \tag{5.67}$$

从这一习题，我们看到平面电磁波有横向电场和磁场(即与其传播方向垂直的场)，而且它们由对应于该波的两个独立极化的两个独立函数 $E_y(u)$ 和 $E_z(u)$ 所确定.

D 理想流体动力学

5.15 李导数的作用

"理想"流体指的是无粘滞性并绝热(即无热传导)地运动着的流体. 熟知的是，这种流体遵守某些局部的守恒定律：在其运动过程中，任意流体元具有恒定的质量、熵，以及在某种意义上说还有涡量. 这些守恒定律通常是应用普通的向量分析来推导的，看上去这是相当复杂的. 从几何的观点来看，流的存在就使我们立即想起应用李导数. 我们现在就来证明：当用李导数来处理这些局部守恒定律时，它们就显得清楚多了.

5.16 共动时间导数

我们在习题 4.22 中已经看到，通常形式为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\bar{V})=0$$

的连续性方程，具有下列形式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_{\bar{V}}\right)(\rho\tilde{\omega})=0, \tag{5.68}$$

其中 $\tilde{\omega}=\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$ 是欧几里得空间中的体积三次形式. 算子 $(\partial/\partial t+\mathscr{L}_{\bar{V}})$ 是跟随一个特定的流体元的自然的时间微分算子. 为了说明这一点，我们不考虑空间，而要考虑称之为伽利略时空的四维流形，它的坐标是 (x, y, z, t)(参见 2.10 节). 事实上，任意 $t=$常数的超曲面就是一个欧几里得空间. 于是某一流体

元的运动便在该时空中画出一条称为该元的世界线的曲线．图5.3中画出了两条这样的世界线(AA'和BB')．在时间的一个无限小变化dt中，此曲线上坐标为(x, y, z, t)的一点移动到坐标为$(x+V^x dt,\ y+V^y dt,\ z+V^z dt,\ t+dt)$的另一点．如果我们把四维流形中该世界线的切线记为$\overline{U}$，那么它的分量显然为$(V^x, V^y, V^z, 1)$．跟随流体元的时间导数简单地就是$\mathscr{L}_{\overline{U}}$，即沿着该元的世界线上的自然导数．

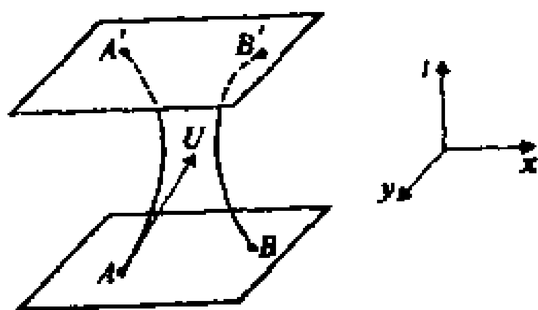


图 5.3 伽利略时间的两个瞬时，以及两个粒子的两条世界线AA'和BB'．向量$\overline{U}$是用时间t为参数的曲线AA'的切线．

习　题　5.18

应用(2.7)式证明

$$\mathscr{L}_{\overline{U}}\overline{W}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_{\overline{V}}\right)\overline{W}, \tag{5.69}$$

这里$\overline{W}$是$t=$常数的超曲面中的任意向量场，即任意纯空间向量场($W^t\equiv 0$)．

如果以完全在$t=$常数的三维空间中的任意$\binom{n}{0}$型张量来代替(5.69)式中的$\overline{W}$，那么显然(5.69)式仍然成立．看来可能是，张量是纯空间的这一性质，在此四维流形的坐标改变下不是不变的．因为这一性质简单地就是表明该张量的所有t分量都是零．可是，因为在非相对论性物理学中对空间和时间之间作出了严格区别，张量的纯空间性不随该四维流形中的坐标变换而改变，这一种看法还是可接受的．

习　题　5.19

对伽利略时空的纤维丛结构(2.10 节)保持"自然"的最一般坐标变换是

$$t'=g(t);\ x^{i'}=f^{i'}(x^i,\ t),\ i=1,\ 2,\ 3. \tag{5.70}$$

证明：在这种变换下，时间分量为零($\mathbf{A}(\cdots,\ \tilde{\omega}^t,\ \cdots)=0$)的一个$\binom{n}{0}$型张量 $\mathbf{A}$，仍保持时间分量为零，而空间分量为零(即只有 $B_{t\cdots t}$ 不为零)的一个$\binom{0}{n}$型张量 $\mathbf{B}$，仍保持空间分量为零。

5.17　运动方程

流体是绝热的条件意味着流体元的总熵必须是守恒的．用比熵 S(单位质量的熵)来研究是方便的．在流动中，它显然是保持恒定的：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_{\bar{V}}\right)S=0. \tag{5.71}$$

对于压强为 p，且在势为 ϕ 的重力场中运动的流体而言，它的欧拉运动方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}V^i+V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}p+\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi=0. \tag{5.72}$$

由于下面两个原因，这一方程仅在笛卡儿坐标中才是成立的．第一，有一些指标在上面，有一些指标在下面，只是在正交归一基中，它们才会没有区别．第二，仅当变换矩阵 $A^{i'}_{j}$ 与位置无关时，项 $\partial V^i/\partial x^j$ 才如一个$\binom{1}{1}$型张量那样变换(习题 4.5)．从一个笛卡儿坐标系到另一个笛卡儿坐标系的变换能使这一点成立．为了修改(5.72)式使之对任意坐标系成立，通常的做法是引入协变导数(它的定义在下一章讨论黎曼几何时给出)．这里我们

给出一种非常有启发性的不同处理方法. 首先, 注意到(5.72)式的前面两项可以写成

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V^j\frac{\partial V_i}{\partial x^j},$$

这是因为在笛卡儿坐标中, V^i 和 V_i 之间是没有区别的. (自然, 我们这里要用到此三维空间中有一个度规张量这一事实.) 其次, 用一次形式 $\tilde{V}=g(\bar{V},\ )$ 的李导数((3.14)式)来代替导数 $V^j\partial/\partial x^j$:

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{V})_i&=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i+V_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j\\&=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(V_jV^j),\end{aligned}$$

其中为了得到最后的表达式, 我们再次用到了 $V_j=V^j$ 这一点. 因而我们有

$$V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i=(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{V})_i-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}V^2\right).\tag{5.73}$$

上式右边的两项在任意坐标系下都是张量! 所以, (5.72)式变为下列与坐标系无关的表达式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_{\bar{V}}\right)\tilde{V}+\frac{1}{\rho}\tilde{d}p+\tilde{d}\left(\Phi-\frac{1}{2}V^2\right)=0.\tag{5.74}$$

在此式中, 度规具有决定性的作用, 但却是潜藏着的: 从 $\tilde{V}$ 构造 $\bar{V}$ 需要度规, 构造 $V^2=\tilde{V}(\bar{V})$ 也需要度规.

5.18 涡量守恒

我们现在能够来研究涡量守恒定律了. 用通常的话来说, 涡量是速度的旋度, 即 $\nabla\times\bar{V}$. 正如我们在第四章中所看到的, 严格地说这是外微分 $\tilde{d}\tilde{V}$. 现在外微分和李微分可换(自然, $\tilde{d}$ 和 $\partial/\partial t$ 可换, 因为 $\tilde{d}$ 只包含空间导数), 所以从(5.74)式, 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_V\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}p. \tag{5.75}$$

(为了简洁起见，我们已去掉了符号上的"～"记号.)有两种情况应予考虑. 较为容易的情况是，流形满足状态方程 $p=p(\rho)$. 此时，$\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\rho\equiv 0$，并且我们发现涡量二次形式 dV 满足局部的(或对流的)守恒定律:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_V\right)\mathrm{d}V=0. \tag{5.76}$$

这是以最自然的形式表述的亥姆霍兹环流定理. 然而，如果有更一般的状态方程 $p=p(\rho, S)$，那么就有一个不同的结果. 此时(5.75)式的右边不为零，但它与 $\mathrm{d}S$ 的楔积为零:

$$\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}p=0. \tag{5.77}$$

习 题 5.20

证明(5.77)式.

(5.71)式的外微分给出

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_V\right)\mathrm{d}S=0. \tag{5.78}$$

所以作(5.78)式与 $\mathrm{d}S$ 的楔积就给出

$$\mathrm{d}S\wedge\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_V\right)\mathrm{d}V=0,$$

或

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_V\right)\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V=0. \tag{5.79}$$

这一方程是最一般的涡量守恒定律，称为厄特尔定理.

三次形式 $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V$ 的意义可能不是很明显的，但是可以把(5.79)式改为一个对于标量适用的守恒定律. 之所以能这样做是因为存在另一个守恒的三次形式 $\rho\omega$，以及在三维空间中的任

意两个三次形式是成正比的. 所以就有一个标量函数 α,满足

$$dS\wedge dV=\alpha\rho\omega, \tag{5.80}$$

于是(5.68)式和(5.79)式给出下列标量方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathscr{L}_{\bar{V}}\right)\alpha=0.$$

可以证明,若用通常的向量记号表示的话,我们有

$$\alpha=\frac{1}{\rho}\nabla S\cdot\nabla\times V. \tag{5.81}$$

习　题　5.21

证明(5.81)式. (提示:把(5.80)式的两边都用 $dx\wedge dy\wedge dz$ 来表示.)

使用第四章中引入的符号,我们有

$$\alpha=\frac{1}{\rho}\epsilon^{ijk}S_{,i}V_{k,j}. \tag{5.82}$$

所以 α 是 $dS\wedge dV$ 关于 $\rho\omega$ 的对偶. 于是 α 的守恒是 $dS\wedge dV$ 守恒的一个自然的结果:$\rho\omega$ 守恒这一事实意味着关于它来构造对偶也是一种守恒的运算, 即这一运算与算子 $\partial/\partial t+\mathscr{L}_{\bar{V}}$ 可交换.

习　题　5.22

速度场 $\bar{V}$ 的切变在笛卡儿坐标中由下列方程所定义:

$$\sigma_{ij}=V_{i,j}+V_{j,i}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\theta, \tag{5.83}$$

这里的 θ 是膨胀:

$$\theta=\nabla\cdot\bar{V}. \tag{5.84}$$

证明在任意坐标系中有

$$\theta=\frac{1}{2}g^{ij}\mathscr{L}_{\bar{V}}g_{ij}, \tag{5.85}$$

$$\sigma_{ij}=\mathscr{L}_{\bar{V}}g_{ij}-\frac{1}{3}\theta g_{ij}. \tag{5.86}$$

E 宇 宙 论

6.19 宇宙学原理

大多数物理学家都知道，爱因斯坦的广义相对论给予近代物理一个首尾一致而且卓有成效的框架来研究宇宙学，即我们宇宙的大尺度结构. 大多数物理学家也知道，至少在最简单的等级上，只有三种基本的宇宙模型："闭的"，"平直的"和"开的"宇宙. 也许知道得比较少的是，仅有这三种模型的这一简洁性，根本不是爱因斯坦方程的预言或结论，这只是假定宇宙的大尺度性质是均匀和各向同性的结果.（下面将精确地定义均匀性和各向同性.）象物理学的所有其他基本理论一样，广义相对论是一种动力学理论：只要给出初始条件，该理论能预言这些条件今后的演化，以及推演它们过去的历史. 宇宙的均匀性是我们放入的一部分初始条件，用以构造最简单的模型. 广义相对论的重要贡献在于它允许我们选取空间的**几何学**，即它的度规张量场作为一部分的初始条件. 当然在牛顿引力论中这是不可能的. 一旦我们决定选取最均匀的初始条件后，正是微分几何告诉我们只有三种度规张量场是可能的. 在下面不多的几节中，我们就去找这些度规. 我们将使用在第三章中发展起来的关于对称性和不变性的数学工具，但是我们却并不需要知道广义相对论，甚至也不需要知道黎曼几何.

我们从下列物理问题着手：宇宙，就小尺度来说，确实是起伏不匀的. 在核(10^{-15}m)到星际(10^{17}m)的任何尺度内，我们宇宙的特征是，物质聚集成一些小区域，而不同种类的物质之间或物质与真空之间有着明显的界限. 恒星本身或多或少地聚集成孤立的星系，而星系集合成数个到数千个星系团，甚至星系团

会松散地联合为超星系团．然而近代天文学的观察已能远远超出超星系团的尺度范围．而且人们发现，在所有的方向上，宇宙的性质当对越来越大的尺度范围求平均时，其趋势是能得到越来越大的均匀性．正是因为这些，大尺度范围中的平均性质（特别是平均密度和速度）对宇宙的动力学是重要的．宇宙学家喜欢把这一均匀性至少结合到一些最简单的模型中去．但是均匀性的意义到底是什么呢？毕竟在一个动态的宇宙中，更遥远的区域看上去是与较近的区域不同的（如果只是由于它们是处于历史上的更早期），这一点已明示在图 5.4 中．事实上，正是这种情况（遥远区域中的类星体的个数就比邻近区域中多得多），我们"观察到"的均匀性实际上就是把遥远区域的条件外推到现在的结果．但是，在相对论中甚至"现在"这一概念也不是绝对的．我们在这里不能详尽地讨论这些问题，但是我们能说一下我们是如何来解决它们的．

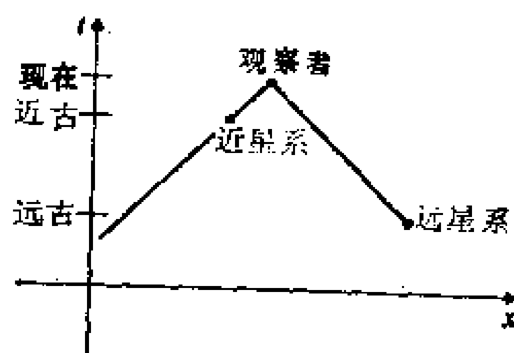


图 5.4　时空中的一片，表明了由坐标 t（时间）和 $x(y=z=0)$ 标记的所有事件．由于电磁辐射以有限的速度传播，所以我们看到的遥远物体比我们看到的邻近物体处于更早的历史时期．

基本的思想是把时空分割成一簇充满它的三维类空子流形（叶状结构），这些子流形称为时间为常数的超曲面（参见图 5.5）．实际上这恰好相当于时间坐标的选取．时空的度规张量 $g|$，象任意 $\begin{pmatrix}0\\m\end{pmatrix}$ 型张量一样，在每一个这样的超曲面上都有一个自然的限制．如果 $g|$ 在所有与它相切的向量上是正定的，那么该超曲面是类空的．宇宙的"均匀性"与这些超曲面上的开林向

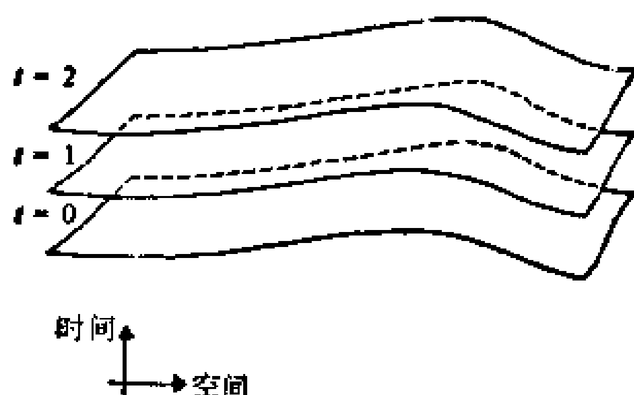


图 5·5 把时空分割为具有常数时间 t 的空间。

量或等距变换有关.

设 G 是度规张量场为 g| 的流形 S 的等距变换李群，G 的李代数是 g| 的开林向量场的李代数. G 的元素是 S 到它自身上的映射(微分同胚). 如果对 S 的任意两点 P 和 Q，存在 G 的某一元 g，满足 $g(P)=Q$，即 g 把 P 映为 Q，那么称 G 在 S 上的作用为在 S 上是可迁的. 对于流形 S，如果它的等距变换群在其上可迁地作用，那么称它均匀的(或齐次的)(参见图 5.6). 这正是意味着 S 上处处有一样的几何.

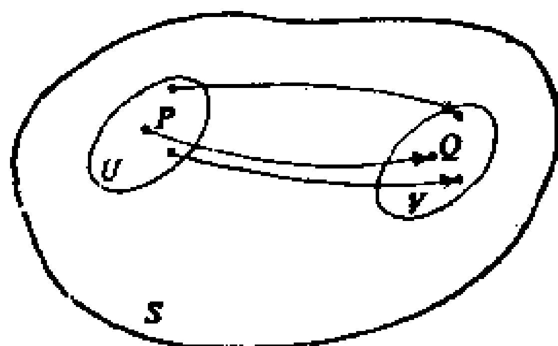


图 5.6 P 的某一邻域由 g 等距地映到 $Q=g(P)$ 的一个邻域 V 上：P 点附近的几何与 Q 点附近的几何没有差别。

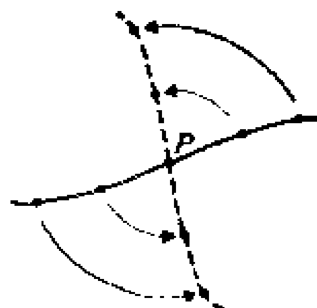


图 5.7 P 点的迷向群通过把经过 P 点的一条曲线映为经过 P 点的另一条曲线给出 $T_P \to T_P$ 的映射。

假定有 G 的一些元使 S 的某一点 P 固定不变，于是它们中的任意两个元之积也使 P 不变，而且因为单位元必是其中的一个，所以它们构成 G 的一个子群 H_P，它称为 P 点上的迷向群(固定群，或各向同性群)．自然，它们是绕过 P 的一根轴的熟悉的转动．P 点的迷向群固定 P 点不变，所以把过 P 点的任意曲线映为过 P 点的另一曲线(参见图 5.7)．因此这就诱导了 P 点的切向量到 P 点的另一切向量的映射，即映射 $T_P \to T_P$．映射构成的这个群是 P 点的线性迷向群．(回忆一下，对李群的伴随表示所作的类似的讨论，见 3.17 节．)对于 m 维流形 S，如果它的迷向群 H_P 恰好是 $SO(m)$，即绕过 P 点的任意轴的转动所构成的群，那么称它为对于 P 点是各向同性的．若 S 对于每一点 P 都是各向同性的，则称 S 是各向同性的．

对于一个宇宙模型 M，如果它有一个类空超曲面的叶片化，而且其中每一个类空超曲面都是均匀的，那么称它为均匀的宇宙．对于各向同性的宇宙，有类似的定义．如上所述，有很多证据表明我们的宇宙是均匀的，至少在我们观察邻域的大尺度范围内是这样．我们还看到在天空的不同方向上，不存在宇宙结构的有规则的变化．这暗示着宇宙对于我们是各向同性的．近代科学不喜欢假定我们生活在宇宙中的一个特别有利的位置上．这一点常被上升到原理的地位，它有下列几个名称：宇宙学原理，哥白尼原理或平庸原理．这个原理断言：我们看到的靠近我们的那一部分宇宙的性质，就平均而言，与宇宙中任一处的另一观察者看的情况是一样的．这一原理使得宇宙学家，在没有相反信息的前提下，把我们局部的均匀性和各向同性推广到整个宇宙．自然，这并不是必须的，而且当前的许多研究都致力于探讨非均匀及(或)非各向同性的宇宙论．但是三种基本模型是仅有的三种均匀的各向同性的三维空间的模型．这就是我们将

要证明的。

习 题 5.23

正如我们从3.9节中所知道的，球面 S^2 的开林向量就是向量 l_x, l_y, l_z. 它们构成 S^2 的等距变换群 $SO(3)$ 的李代数的基. 证明 S^2 是一个均匀和各向同性的流形.

5.20 最大对称性的李代数

我们从研究三维流形 S 的开林向量场开始. 如果 ξ 是一个开林向量，它在任意坐标系中的分量满足方程

$$(\mathscr{L}_{\xi}\, g|)_{ij}=\xi^k g_{ij,k}+\xi^k_{,i}g_{kj}+\xi^k_{,j}g_{ik}=0. \tag{5.87}$$

利用一次形式 g|(ξ,)的分量将是更为方便的，

$$\xi_k=g_{kl}\xi^l. \tag{5.88}$$

它们满足下列等价的方程：

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}-2\xi_l\Gamma^l_{ij}=0, \tag{5.89}$$

其中引入了下列定义：

$$\Gamma^l_{ij}=\frac{1}{2}g^{lm}(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}). \tag{5.90}$$

(这里的 Γ^k_{ij} 包括它的因子1/2是按常规定义的，在阅读了第六章以后，它的意义就更清楚了. 现在对于我们来说，(5.90)式只是简单地定义了一个方便的简记符号.)

(5.89)式在交换 i 和 j 下是对称的，因此在 n 维空间中，它表示 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立的微分方程. 例如 $n=3$ 时，有6个. 因为只有 ξ 的3个分量要求求解，方程组是超定的，而且一般的度规张量 g| 并没有开林向量. 我们的目标是求出 g| 应取什么形式才能使它有最多数目的开林向量. 为了求出这个最大数，我们对(5.89)式微分，可得

$$\xi_{i;jk}+\xi_{j;ik}=2(\xi_l\Gamma^l_{ij})_{;k}. \tag{5.91}$$

把(5.91)式加上指标作 $i\to k$, $j\to i$, $k\to j$ 置换后所得的式子，再减去指标作 $i\to j$, $j\to k$, $k\to i$ 置换后所得的式子，我们得到

$$\xi_{i;jk}=H^l_{ijk}\xi_l+K^{lm}_{ijk}\xi_{l;m}, \tag{5.92}$$

这里 H^l_{ijk} 是 g_{ij} 及其一阶和二阶导数的一个复杂函数，而 K^{lm}_{ijk} 类似地依赖于 g_{ij} 及其一阶导数. (5.92)式的关键点是，如果我们知道在任意点 P 的 ξ_i 和 $\xi_{i;j}$，且如果我们知道各处的 g_{ij}，我们从(5.92)式能确定 P 点的 $\xi_{i;jk}$，以及通过对(5.92)式逐次求导，可类似地求得它在 P 点的所有高阶导数. 在解析流形(我们将作这样的假定)上，这足以在各点确定向量场 ξ. 而且我们知道，由(5.89)式，由 P 点的 ξ_i 可确定 P 点的 $\xi_{i;j}$ 的**对称部分**. 由此得到：S 上的每一个开林向量由 S 的**任意点** P 给出的下列值

$$\eta_i\equiv\xi_i(P) \text{ 和 } A_{ij}\equiv\xi_{[i;j]}(P) \tag{5.93}$$

所完全确定. 重要的是，在 P 点选取一组 $\{\eta_i, A_{ij}\}$ 不一定能确定一个开林向量，因为可能会发生(5.92)式不存在解的情况：它的右边在 i 和 k 变换下可能是不对称的. 但是这一论证确实表明了开林向量的个数不会比能独立选取的 $\{\eta_i, A_{ij}\}$ 的个数来得多. 在 m 维流形中，根据(5.93)式后者等于

$$m+\frac{1}{2}m(m-1)=\frac{1}{2}m(m+1) \tag{5.94}$$

一个流形，如果它有最大数目的开林向量场，那么称它是**极大对称性的**.

容易证明，一个极大对称性的连通流形 S 是均匀的. 在任意点 P，我们能够选取一个开林向量场，它在 P 点有任意切向量. 与这些开林向量相关的那些单参数子群就可以把 P 映为 P 的某一邻域 U 中的任意点 Q (参见图 5.8). 相继地进行这种

映射，显然可以把 P 映为 S 中的任意点。由此得到，等距变换群将 P 映为任意点，从而 S 是均匀的。

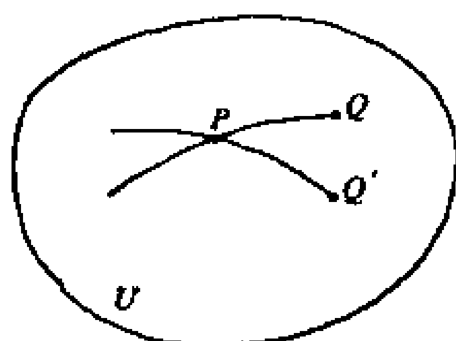


图 5.8 只要在等距变换群中选取适当的单参数子群，我们就能把 P 映为 P 的邻域 U 中的任意点 Q 或 Q'。

下面我们来讨论一下 P 点的迷向群，其中变换使 P 点固定不变。所以与之相关联的开林向量场在 P 点都为零。任意两个开林场 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 的李括号是

$$[\bar{V},\ \bar{W}]^i = V^i{}_{;j}W^j - W^i{}_{;j}V^j,$$

或

$$[\bar{V},\ \bar{W}]_i = V_{i,j}W^j - W_{i,j}V^j - g_{ik,j}(V^kW^j - W^kV^j). \tag{5.95}$$

如果 $\bar{V}$ 和 $\bar{W}$ 在 P 点都为零，那么 $[\bar{V},\ \bar{W}]$ 也复如此。但是 $[\bar{V},\ \bar{W}]$ 是开林向量场的一个线性组合，因此为了使它在 P 点为零，它就必须只是那些在 P 点也为零的场的线性组合。所以这些场构成一个李子代数，显然这是 P 点的迷向群的代数。下面的习题表明，如果 S 是类空的，那么此时的迷向群是 $SO(m)$，换言之，极大的对称性类空流形是各向同性的。

习 题 5.24

在 P 点选取习题 2.14 所允许的那种坐标系，在其中对类空流形有 $g_{ij}(P)=\delta_{ij}$，以及 $g_{ij,k}(P)=0$。

(a) 证明在 P 点附近，一个各向同性的开林向量场由下式所给出：

$$V^i = A^i_j x^j + O(x^2), \tag{5.96}$$

这里 A^i_j 是任意斜对称矩阵，即

$$A^i_j = -A^j_i. \tag{5.97}$$

(b) 设 $\bar{W}$ 是另一个各向同性的开林向量场，即

$$W^i = B^i_j x^j + O(x^2),$$

证明

$$[V, W]^i = [A, B]^i_j x^j + O(x^2), \tag{5.98}$$

这里$[A, B]^i_j$表示矩阵A^i_j和B^i_j的换位子的矩阵元。这表示迷向群的李代数就是$SO(m)$的李代数。

(c) 由此推证P点的迷向群是$SO(m)$。

(d) 证明：如果g^i_j *不是*正交的(或负定的)，那么此时的迷向群就不是$SO(m)$。证明四维闵可夫斯基空间中一点P的迷向群是洛伦兹群$L(4)$。

5.21 球对称三维空间的度规

现在我们集中来讨论类空的三维流形。迷向群是$SO(3)$时，我们就说该流形对于它的任意点都是球对称的。在这一节中，我们构造一个方便的坐标系来进行后面的计算。我们知道，$SO(3)$的开林向量通过其积分曲线定义了球面S^2。因为每一点都在一个这样的球面上，这些球面就构成流形S的一个叶片化。我们将采用球面坐标，在每一个球面上用通常的θ和ϕ，并用第三个"径向"坐标来标记这些球面。径向坐标有一个特别方便的选取法。S的度规在每一个球面上诱导了一个度规张量，而后者转而又定义了一个体积二次形式和一个总面积(此体积二次形式的积分)。我们用下列等式

$$\text{面积} = 4\pi r^2,\ r = (\text{面积}/4\pi)^{1/2} \tag{5.99}$$

来*定义*一个球面的径向坐标r，就如图5.9所示。这一用内禀方式定义的坐标不必是处处单调增加的，但是至少在P点的某一邻域中，由局部平直定理(习题2.14)，能保证它是好的。(当然它在$r=0$处是奇异的，但是我们知道如何来处理这一情况。)

除了径向坐标外，我们还需要更精确地定义θ和ϕ。我们已经在每一个球面上配置了θ和ϕ，但是我们还未说过一个球

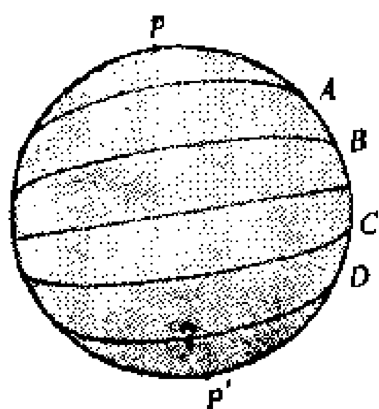


图5.9 标记一个球面上各圆的径向坐标，它的定义是圆周 $\div 2\pi$. 这是正文中所述的内容在二维时的情况。开始时，径向坐标随着离开 P 点(例如从 A 到 B)而增加，随后开始减小(例如从 C 到 D)，在 P' 点处变为零。

面的 $\theta=0$ 的极点如何与另一个球面的极点相关联. 也即当我们从一个球面移到另一个球面上时，有一个球的坐标移动的不确定性. 我们用下列方法来固定极点. 在每一点 Q 存在一个在此点与球面垂直的向量 $\bar{n}$(对于 $T_Q(S^2)$ 中的任意 $\bar{V}$, $g|(n, \bar{V})=0$)，它归一化为($g|(\bar{n}, \bar{n})=1$)，且从 P 点指向外侧(这在 P 点邻近是有很好定义的，并通过连续性扩展到整个 S 上). 这一向量场称为单位法向量场，而且除了在 P 点外，它是 C^∞ 的. 在任意选定的 S^2 上，任取极点，然后用下述方法固定所有其他球面的极点：它们位于通过原极点的 $\bar{n}$ 的积分曲线上. 这一方法明示于图 5.10 中. 显然，这意味着 $\bar{n}$ 的任意积分曲线是 θ 和 ϕ 为常值的一条曲线，或者换言之，它是径向坐标的一条坐标线. 因为 $\partial/\partial\theta$ 和 $\partial/\partial\phi$ 是这些球面的切线，上述构造法意味着

$$g_{r\theta}=g|(\partial/\partial r,\ \partial/\partial\theta)=0, \tag{5.100a}$$

$$g_{r\phi}=g|(\partial/\partial r,\ \partial/\partial\phi)=0. \tag{5.100b}$$

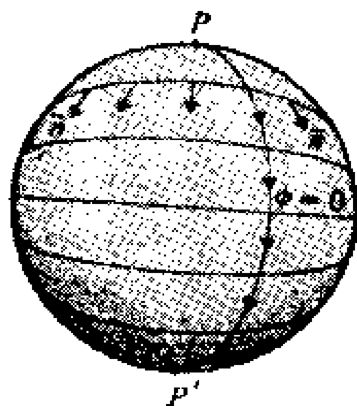


图 5.10 确定图 5.9 中每一个 r 为常数的圆的极点：要求它们都位于单位法向量场 $\bar{n}$ 的同一积分曲线上.

而且在每一球面上，度规是单位球面度规的 r^2 倍(r^2 是使面积为 $4\pi r^2$ 的适当因子)：

$$g_{\theta\theta}=r^2,\ g_{\theta\phi}=0,\ g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta. \tag{5.100c}$$

所以我们只有一个度规分量 g_{rr} 是未知的.

习 题 5.25

(a) 把 P 点到具有坐标 r 的一个球面的距离定义为沿 $\theta=$常数, $\phi=$常数的一条曲线的下列积分

$$\int_0^r (g_{rr})^{1/2}\mathrm{d}r, \tag{5.101}$$

论证 g_{rr} 必定与 θ 和 ϕ 无关.

(b) 由习题 2.14 证明, 当接近 P 点时

$$\lim_{r\to 0} g_{rr}=1. \tag{5.102}$$

由习题 5.25(a), 我们有 $g_{rr}=f(r)$, 以及度规的下列形式

$$(\mathrm{g}_{ij})=\begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.103}$$

因为这一结果是用 P 点的迷向群来求得的, 所以我们不指望能确定 $f(r)$. 因此我们必须用 S 的等距变换中的其余部分来确定 $f(r)$.

5.22 六个开林向量的构造

有几种方法可以用来决定 $f(r)$ 的形式, 并保证 S 的均匀性. 我们将要采用的方法是应用 4.29 节中的向量球谐函数来构造 S 的所有开林向量场.

S 上的任意向量场 $\overline{V}$ 可表达为下列形式:

$$\overline{V}=\xi_{lm}(r)Y_{lm}\frac{\partial}{\partial r}+\eta_{lm}(r)\overline{Y}^{\mathrm{I}}_{lm}+\zeta_{lm}(r)\overline{Y}^{\mathrm{II}}_{lm}, \tag{5.104}$$

其中隐含着对 l 和 m 的求和，以后当它们在同一项中重复出现时也这样理解. 我们将用到这一等式的分量. 从(4.101)式容易推得

$$(\overline{Y}_{lm}^{+})^{\theta}=Y_{lm,\theta};\ (\overline{Y}_{lm}^{+})^{\phi}=\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{lm,\phi}; \qquad (5.105a)$$

$$(\overline{Y}_{lm}^{-})^{\theta}=\frac{1}{\sin\theta}Y_{lm,\phi};\ (\overline{Y}_{lm}^{-})^{\phi}=-\frac{1}{\sin\theta}Y_{lm,\theta}. \qquad (5.105b)$$

由此得到

$$V^r=\xi_{lm}Y_{lm}, \qquad (5.106a)$$

$$V^\theta=\eta_{lm}Y_{lm,\theta}+\zeta_{lm}Y_{lm,\phi}/\sin\theta, \qquad (5.106b)$$

$$V^\phi=\eta_{lm}Y_{lm,\phi}/\sin^2\theta-\zeta_{lm}Y_{lm,\theta}/\sin\theta. \qquad (5.106c)$$

这些分量必须满足开林方程:

$$K_{ij}\equiv V^k g_{ij,k}+V^k_{\ ,i}g_{kj}+V^k_{\ ,j}g_{ik}=0, \qquad (5.107)$$

这里 g_{ij} 由(5.103)所示.

$\{K_{\theta\theta}=0,\ K_{\theta\phi}=0,\ K_{\phi\phi}=0\}$ 这三个方程并不包含 ξ_{lm}, η_{lm} 或 ζ_{lm} 的导数，因此我们先来解决它们. 首先考虑下列组合(用(5.103)式来上升指标):

$$0=K^\theta_\theta+K^\phi_\phi=\frac{4}{r}\xi_{lm}Y_{lm}+2\eta_{lm}L^2(Y_{lm}),$$

这里 L^2 是由(3.33)式定义的算子. 应用(3.33)式，有

$$[(2/r)\xi_{lm}-l(l+1)\eta_{lm}]Y_{lm}=0.$$

由球谐函数的线性无关性，我们得到

$$\frac{2}{r}\xi_{lm}-l(l+1)\eta_{lm}=0. \qquad (5.108)$$

其次考虑下列一些组合:

$$0=\frac{1}{2}(K^\theta_\theta-K^\phi_\phi)=F_{lm}\eta_{lm}+G_{lm}\zeta_{lm}, \qquad (5.109a)$$

$$0 = -\frac{1}{r^2\sin\theta}K_{\theta\phi} = -G_{lm}\eta_{lm} + F_{lm}\zeta_{lm}, \qquad (5.109b)$$

这里 F_{lm} 和 G_{lm} 是下列表达式的简记符号:

$$F_{lm} = Y_{lm,\theta\theta} - \cot\theta Y_{lm,\theta} - Y_{lm,\phi\phi}/\sin^2\theta,$$

$$G_{lm} = 2Y_{lm,\theta\phi}/\sin\theta - 2\cot\theta Y_{lm,\phi}/\sin\theta.$$

方程(5.109)的解为 $\zeta_{lm} = \eta_{lm} = 0$，除非这两个方程的系数行列式为零. 但是,这一行列式是 $(F_{lm})^2 + (G_{lm})^2$，因此仅当 F_{lm} 和 G_{lm} 都为零时，它才为零. 容易算出这只在 $l=0$ 和 $l=1$ 时(任意 m)才会发生，而 $l \geqslant 2$ 时则是不可能的. 此外，从(5.106)式显然可知：$l=0$ 时没有 η 或 ζ 给出的贡献(再一次应用固定点定理!),因此我们有下列结论:

$$\begin{aligned} l=1: &\quad \eta_{1m},\ \zeta_{1m}\ \text{任意的}, \\ l \geqslant 2: &\quad \eta_{lm} = \zeta_{lm} = 0. \end{aligned} \qquad (5.110)$$

因而(5.108)式给出:

$$\begin{aligned} l=0: &\quad \xi_{00} = 0, \\ l=1: &\quad \xi_{1m} = r\eta_{1m}, \\ l \geqslant 2: &\quad \xi_{lm} = 0. \end{aligned} \qquad (5.111)$$

现在我们转向(5.107)式中的其他三个方程. 第一个方程在转动下是一个标量:

$$0 = K_{rr} = (2f\xi_{lm,r} + f_{,r}\xi_{lm})Y_{lm},$$

这意味着

$$f\xi_{lm,r} + \frac{1}{2}f_{,r}\xi_{lm} = 0. \qquad (5.112)$$

剩下的两个方程 $K_{r\theta} = K_{r\phi} = 0$ 在转动下按向量变换. 这一向量的散度(关于 S^2 的体积)为

$$\begin{aligned} 0 &= (\sin\theta K_r^\theta)_{,\theta} + (\sin\theta K_r^\phi)_{,\phi} \\ &= \left(\eta_{lm,r} + \frac{1}{r^2}f\xi_{lm}\right)\sin\theta L^2(Y_{lm}), \end{aligned}$$

这又意味着(对于 $l>0$)

$$\eta_{lm,r}+\frac{1}{r^2}f\xi_{lm}=0. \tag{5.113}$$

还有一个方程,它可以取为该向量在 S^3 中的对偶的散度

$$0=K_{r\theta,\phi}-K_{r\phi,\theta}=r^2\zeta_{lm,r}\sin\theta L^2(Y_{lm}),$$

自然,这意味着

$$\zeta_{lm,r}=0. \tag{5.114}$$

我们可以得到结论:$\{\zeta_{1m}, m=-1,0,1\}$ 是三个任意常数,由 Y^{-}_{lm} 给出的仅有贡献.未知量 ξ_{1m}, η_{1m} 和 f 的三个方程(5.111)具有下列用任意常数 K 和 V_m 表示的解:

$$f=(1-Kr^2)^{-1}, \tag{5.115}$$

$$\xi_{1m}=V_m(1-Kr^2)^{1/2}, \tag{5.116}$$

$$\eta_{1m}=\frac{1}{r}V_m(1-Kr^2)^{1/2}. \tag{5.117}$$

习 题 5.26

验证方程(5.105), (5.108), (5.109), (5.112), (5.113), (5.114), 以及(5.115~5.117).

习 题 5.27

证明 $V_m=0$ 的开林向量是对应于原点($r=0$)的迷向群的那些开林向量.

习 题 5.28

证明当 $r\to 0$ 时,在 η_{1m} 中出现的明显奇异性是一种坐标效应:向量场在原点有好的行为.

习 题 5.29

在(5.115~5.117)式中命 $K=0$, 证明此时 S 正是欧几里得空间 E^3.

求出定义开林向量 $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ 的一些常数 V_m. 这里的笛卡儿坐标是从我们的极坐标用通常的方法得到的.

5.23 开的,闭的和平直的宇宙

我们现在有了宇宙模型的均匀和各向同性空间的几何的一个完整的描述,它们的度规张量为

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}(1-Kr^2)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}. \qquad (5.118)$$

现只需再给出这一几何的图象就可以了. 下面的坐标变换会有所助益.

习 题 5.30

寻求一个从 r 到 χ 的坐标变换,由它能得到下列度规分量:

对于 $K>0$:

$$(g_{ij})=\frac{1}{K}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin^2\chi & 0\\ 0 & 0 & \sin^2\chi\sin^2\theta\end{pmatrix}, \qquad (5.119a)$$

对于 $K<0$:

$$(g_{ij})=\frac{1}{|K|}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sinh^2\chi & 0\\ 0 & 0 & \sinh^2\chi\sin^2\theta\end{pmatrix}. \qquad (5.119b)$$

这表明所论的几何实际上只依赖于 K 的符号, K 的大小仅起一个总体上的标量因子的作用.

在 $K>0$ 的情况中, 径向坐标为 χ 的球面具有面积 $4\pi\sin^2\chi/K$, 它从 $\chi=0$ 时的 0 开始增加到 $\chi=\pi/2$ 时的最大值, 然后减小到 $\chi=\pi$ 时的 0. 这使我们想起了 S^2(图 5.9). 事实上, 这是半径为 $K^{-1/2}$ 的球面 S^3 的度规. 因为此时空间是有限

的，所以这宇宙称为闭的.

习 题 5.31

寻求 E^4 的从笛卡儿坐标 $\{x^i\}=\{w, x, y, z\}$ 到球面坐标 $\{x^{i'}\}=\{r, \chi, \theta, \phi\}$ 的一个坐标变换，在其中当限制于球面 $S^3(w^2+x^2+y^2+z^2=K^{-1})$ 时，度规 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 具有 (5.119a) 式给出的分量 $g_{i'j'}$.

$K=0$ 的情况已在习题 5.29 中讨论过了. 它是平直的宇宙.

$K<0$ 的情况是开的宇宙，它是最难以想象的. 径向坐标为 χ 的球面的表面积是 $4\pi\sinh^2\chi/|K|$，它随 χ 增加得很快. 这一宇宙是无界的.

习 题 5.32

(a) 通过考察 $\chi=$常数的球面的面积与原点($\chi=0$)到该球面的距离之间的关系 (5.101) 式，证明(5.119b)式所示的度规不能由欧几里得度规限制在任意 E^n 的任何子流形上得到.

(b) 寻求闵可夫斯基空间的一个子流形，它的度规是(5.119b)式.

如果给爱因斯坦方程以均匀的和各向同性的初始条件(这不仅包含了所论的几何，也包含了物质变量)，那么宇宙随后的演化仍保持着这样对称性. 由此得到，能随时间改变的那一部分几何只是标量因子 K：随着时间的推移，宇宙"变大"或"变小". 然而，我们必须十分小心，不要去作任何与坐标有关的论断. 对于闭的宇宙，它的总体积是有限的，K 的改变，确实会引起总体积的改变. 但是平直的和开的宇宙都是无限的，因此讲它们的总体积就没有意义了. 广义相对论告诉我们，(5.119)式中的坐标是"共动"的：在宇宙的任意小区域中的星系的局部平均静止标架，在时间的演化中保持 $\{\chi, \theta, \phi\}$ 恒定. 由此得出

K 的改变产生了星系之间距离的改变，这就是宇宙膨胀所指的意思．在宇宙的"标准模型"中，我们假定了均匀性和各向同性以及其他一些情况，这三种宇宙都从零"体积"($K=\infty$)开始，从这个"大爆炸"膨胀出去．闭宇宙膨胀到一个最大值，再塌缩．平直宇宙按一个渐近于零的速率膨胀，而开宇宙按一个渐近于一非零极限的速率膨胀．所有这一些情况都是爱因斯坦方程的推论．为了理解这些方程，有必要在我们流形中再增加一级结构：仿射联络．这将在第六章中讨论．

5.24 参考文献

热力学的一本简明的引论性的好书是：

E. Fermi, *Thermodynamics* (Dover, New York 1956).

凯雷瑟多里定理在下列两书中论述，后者立足点更高：

S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover, New York, 1958);

R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations* (Academic Press, New York, 1968).

对哈密顿力学的讨论，我们采用了下列书的讲法：

R. Abraham & J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd edn. (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978).

介绍一些同样的概念，但不用几何观点，可以参考下列书：

H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950);

L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, London, 1959).

采用正则守恒量的方法，使得某些流体的不稳定性更容易理解的，可参考：

J. L. Friedman & B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **221**, 937–57 (1978);

222, 281-96(1978).

用几何观点讨论哈密顿力学的一些有用的论文可在下列论文集中找到:

Topics in Nonlinear Dynamics-A Tribute to Sir Edward Bullard, ed. S. Jorna(American Institute Physics, 1978; A. I. P. Conference Proceeding no. 46).

微分形式的一个有趣应用，是用在证明一组动力学方程具有一个哈密顿(即辛)结构的充要条件，这可参考:

R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I-The Inverse Problem in Newtonian Mechanics* (Springer, Berlin, 1978).

关于电磁理论并讨论其相对论表述的入门书，可参考:

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*(Wiley, New York,1976).

比我们的讨论更为深入的，有:

C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).

对相对论性波动方程的高级讨论，有:

F. G. Friedlander, *The Wave Equation on a Curved Space-Time* (Cambridge University Press, 1976).

惠勒关于"没有电荷的电荷"的讨论，请参考下列书中的一些重印论文:

J. A. Wheeler, *Geometrodynamics* (Academic Press, New York, 1962).

索金关于不可定向电荷模型的讨论，见

R. Sorkin, *J. Phys. A*. **12**, 403-21, (1979).

关于流体动力学以及亥姆霍兹定理的入门书，有:

L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, London, 1959);

H. Lamb, *Hydrodynamics* (Dover, New York, 1975).

我们称之为厄特尔的定理实际上是厄特尔得出的更为一般

的结果的一个特殊情况，见：

H. Ertel, *Meteorologische Zeitschrift* **59**, 277(1942).

我们简略地论及了称之为"伽利略时空"(这是相对论创立以前的物理的活动舞台)的流形的性质，讨论它的结构要涉及仿射联络的概念，这将在下一章中进行．参看：

C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973). 其论述清楚易懂．

R. Hermann, *Topics in General Relativity* (Math-Sci Press, Brookline, Mass., 1973). 该书有更专门的讨论．

在连续介质力学中应用李导数对弹性理论是卓有成效的．事实上，想不用这种方法而去阐述有关弹性的广义相对论理论是非常困难的．请参看：

B. Carter & H. Quintana, *Proc. Roy. Soc. London*, **A331**, 57(1972);

B. Carter, *Proc. Roy. Soc. London, A*, 待发表.

大多数论述广义相对论的教科书都讨论了宇宙学．我们的处理方法取材于下列两书：

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972);

Misner *et al.*, 如上所引．

一本容易的入门书是：

M. Berry, *Principles of Cosmology and Gravitation* (Cambridge University Press, 1977).

有关宇宙学中的天体物理和观察方向的讨论，见：

S. Weinberg, 如上所引;

P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1971).

应用群论方法研究均匀的，但不一定是各向同性的宇宙学，请参看：

M. P. Ryan & L. C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, 1975).

第六章　黎曼流形的联络和规范理论

*6.1　引言

本书的主题是研究流形上的微分结构，所以本章论述的内容已超越了这一点．仿射联络是一种附加的结构，它使流形有形状和曲率．仿射联络不能从微分结构中自然产生，甚至它也不是一个张量．由于这一原因，本章就具有补充性质了．然而，给物理学家论述微分几何只有讨论了这一非常重要和典型的深题以后，才能称是完整的．联络在物理学中越来越普及了，尤其是在基本粒子物理的规范理论中．我们将主要讨论仿射联络（黎曼流形），最后一节介绍一下规范联络，以结束我们的讨论．

在前面几章中，我们有时对流形附加额外的结构．那时我们选出一个特别的张量场，作为特殊的，或为体积元或为度规．体积元离流形的微分结构并不远．而另一方面，正如我们将看到的，度规比仿射联络给出更多的结构．但是，在我们前面的应用中，除了把度规用作为$\binom{N}{M}$型张量和$\binom{N-1}{M+1}$型张量之间的一个映射外，对其他所有的一直是回避的．仿射联络并不能使之属于我们已经发展起来的一些结构．从微分结构的观点来看，它是对流形附加的一个根本上全新的结构．因此，相应地，对于物理应用来说，它就有相当大的潜力．

*6.2　弯曲面上的平行性

我们反复强调过，定义在微分流形上不同点上的向量之间，

并无内禀的平行概念．仿射联络是一种法则，由它可以定义某种平行概念．为了预见到这种法则可能是怎样的，让我们考虑在通常的弯曲二维曲面——球面上平行的概念．在图 6.1 中，向量 $\vec{V}$ 与大圆 ABC 切于北极(点 A)．假定我们沿着 ABC 把 $\vec{V}$ 带到(或迁移)南极 C 点．为了在二维条件下有定义，必须保持这一向量与该球面相切，因此当我们带着它移动时，就不能转动它，它将简单地保持与该曲线 ABC 相切．结果它在 C 点变成 $\vec{V}'$．我们从三维来看，$\vec{V}'$ 的指向与 $\vec{V}$ 反平行了．至少对于球面几何而言，我们能否假定 $\vec{V}$ 和 $\vec{V}'$ 是平行的呢？在作出结论之前，假定我们沿着图 6.2 所示的路径 ADC 把 $\vec{V}$ 从 A 移动到 C，这里 ADC 是另一个大圆，它在两个极点都与 ABC 相交成直角．因为 $\vec{V}$ 开始时与 ADC 垂直，那么移动它的自然方式是，不要扭转它，让它保持与 ADC 垂直，并与球面相切．这就在 C 点产生了向量 $\vec{V}''$．在我们看来，$\vec{V}''$ 确实与 $\vec{V}$ 平行．但是 $\vec{V}''$ 和 $\vec{V}'$ 都是 C 点的向量，他们是反平行的！那么，到底哪一个向量是与 $\vec{V}'$ 平行的呢？显然，如果我们单单考虑球面的内禀性质，这两个向量都不能定义成与 $\vec{V}$ 平行的．此时不存在整体平行的概念．我们所能做到的，也是我们已经做的，即沿一条曲线移动向量不改变其方向，以此来定义平行移动的概念．仿射联络是平行移动的一种法则．

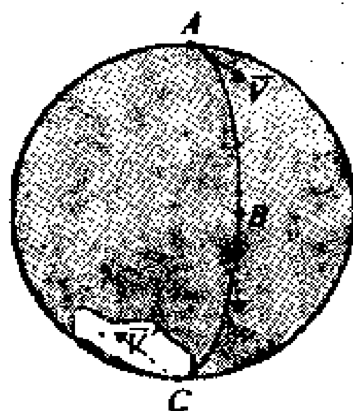


图 6.1　向量 $\vec{V}$ 沿球面的大圆平行移动．

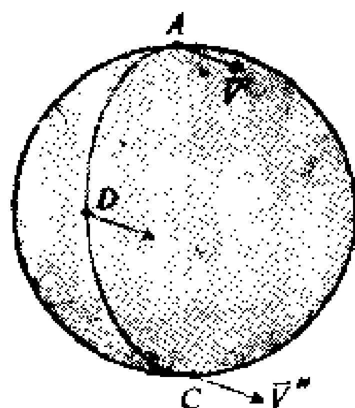


图 6.2　平行移动的另一条路径，结果不同了．

*6.3 协变导数

我们暂时以抽象的观点来看一下仿射联络．当我们在下一节中引入分量以后，这将会变得更为具体．现在，我们假定有一条曲线 $\mathscr{C}$ 和一个联络，即平行移动的一个法则．设 $\mathscr{C}$ 的切线是 $\bar{U}=\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$．在点 P，从 T_P 中任意选取一个向量 $\bar{V}$．于是这个联络使我们能沿曲线 $\mathscr{C}$ 定义一个向量场 $\bar{V}$，它是由平行移动 $\bar{V}$ 而得到的(参见图 6.3)．因为我们现在能说 $\bar{V}$ 沿 $\mathscr{C}$ 没有改变，所以我们能定义一个导数，关于它 $\bar{V}$ 的变化率为零．这称为沿 $\bar{U}$ 的**协变导数**，记为 $\nabla_{\bar{U}}$，并且有

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V}=0 \Leftrightarrow \bar{V} \text{ 沿} \mathscr{C} \text{ 为平行移动}. \tag{6.1}$$

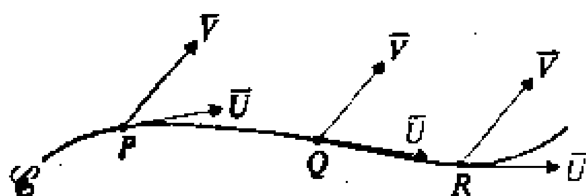


图 6.3 仿射联络使我们能通过从 P 点出发的平移来定义 $\mathscr{C}$ 上任意点 Q 处的 $V(Q)$．

如果 $\bar{W}$ 是一个在 $\mathscr{C}$ 上处处有定义的向量场，那么我们就能大体上象定义李导数(参见图 6.4)那样，定义 $\bar{W}$ 沿 $\mathscr{C}$ 的协变导数．为了在 P 点定义 $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$，把所有的向量表示为 λ 的函数是方便的．若 P 的参数值为 λ_0，那我们就把场 $\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda)$ 定义为被平移的场 $(\nabla_{\bar{U}}\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}=0)$，它在 $\lambda_0+\epsilon$ 点，与 $\bar{W}$ 在该点的向量相等．向量 $\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda_0)$ 是把向量 $\bar{W}(\lambda_0+\epsilon)$ 平移回 λ_0 后得到的．因此，该导数可以完全在向量空间 T_P 中计算：

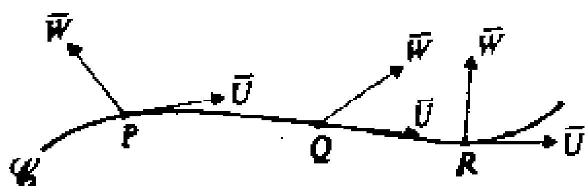


图 6.4 $\mathscr{C}$ 上的向量 $\bar{W}$ 不是平行移动的．把 $\bar{W}$ 与一个是平行移动的向量场 $\bar{U}$ 相比较，使我们能定义 $\bar{W}$ 的协变导数．

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda_0)-\bar{W}(\lambda_0)}{\epsilon}. \tag{6.2}$$

当然这一过程很象我们定义李导数的过程，但是知道下列重大的区别是重要的。定义李导数要把一个向量"拖回来"，这就需要全部线汇，使得 $\bar{U}$ 和 $\bar{W}$ 在曲线 $\mathscr{C}$ 的一个邻域中都有定义。与之相反，平行移动只需要曲线 $\mathscr{C}$，曲线上的场 $\bar{U}$ 和 $\bar{W}$，自然还需要曲线上的联络。

从(6.2)式显然可知，$\nabla_{\bar{U}}$ 是一个微分算子：

$$\nabla_{\bar{U}}(f\bar{W})=f\nabla_{\bar{U}}\bar{W}+\bar{W}\nabla_{\bar{U}}f=f\nabla_{\bar{U}}\bar{W}+\bar{W}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda},\tag{6.3a}$$

其中最后一步用到了对标量求协变导数的显然推广。用莱布尼兹法则可以把协变导数的作用推广到任意类型的张量上去：

$$\nabla_{\bar{U}}(\bar{A}\otimes\bar{B})=(\nabla_{\bar{U}}\bar{A})\otimes\bar{B}+\bar{A}\otimes(\nabla_{\bar{U}}\bar{B}),\tag{6.3b}$$

$$\nabla_{\bar{U}}\langle\tilde{\omega},\ \bar{A}\rangle=\langle\nabla_{\bar{U}}\tilde{\omega},\ \bar{A}\rangle+\langle\tilde{\omega},\ \nabla_{\bar{U}}\bar{A}\rangle.\tag{6.3c}$$

等式(6.3)保证了联络与微分结构的相容性。

假定我们把沿曲线的参数从 λ 变为 μ，那么新的切线将是 $g\bar{U}$，这里 $g=\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\mu$。从(6.2)式可清楚地看出，此时协变导数也将乘以 g，因为 ϵ 将用 $\delta\mu=\epsilon\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda$ 代替，而 $\bar{W}^*_{\mu_0+\delta\mu}(\mu_0)$ 与 $\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda_0)$ 则是一样的。（严格地说，这是我们所讨论的联络的定义中的一部分：沿一曲线平行移动的概念必须与该曲线的参数无关。）所以，对于任意函数 g，我们有

$$\nabla_{g\bar{U}}\bar{W}=g\nabla_{\bar{U}}\bar{W}.\tag{6.4a}$$

我们还必须对仿射联络加上另一个限制：在一点，不同方向的协变导数应有可加性质：

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P+(\nabla_{\bar{V}}\bar{W})_P=(\nabla_{\bar{U}+\bar{V}}\bar{W})_P.\tag{6.4b}$$

这就使得 ∇ 象欧几里得向量演算中的通常 ∇ 一样。综合(6.4a, b)式，我们对任意向量场 $\bar{U}$，$\bar{V}$，$\bar{W}$ 及函数 f，g，有

$$\nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}}\bar{W}=f\nabla_{\bar{U}}\bar{W}+g\nabla_{\bar{V}}\bar{W}.\tag{6.4c}$$

*习 题 6.1

证明：从(6.4c)式和 $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ 是一个向量这一事实能推出 $\nabla\bar{W}$ 是一个 $\binom{1}{1}$ 型张量场，它在自变量 $\bar{U}$ 和 $\tilde{\omega}$ 上的值是

$$\nabla\bar{W}(\tilde{\omega};\bar{U})=\langle\tilde{\omega},\nabla_{\bar{U}}\bar{W}\rangle. \tag{6.5}$$

这个张量称为 $\bar{W}$ 的梯度.

$\nabla\bar{W}$ 是张量场的这一事实意味着我们可以把该曲线完全从协变导数的定义中除去. 张量 $\nabla\bar{W}$ 仅由 $\bar{W}$ 及联络所确定. 这可能会诱使我们进一步认为 ∇ 本身是一个 $\binom{0}{1}$ 型张量场，它正好是这个联络. 但这就不对了. 尽管 ∇ 可以表征该联络，但是它不是一个张量场，这是因为 $\nabla(f\bar{W})\neq f\nabla\bar{W}$（参见 (6.3a)）. 由于这个道理，联络不能认为是一个张量场.

*6.4 分量：基的协变导数

因为任意张量可以表达为基张量的一个线性组合，而且这些基张量又都可从向量基 $\{\bar{e}_i\}$ 导得，所以联络就完全可以由这些基向量的梯度描述. 因此我们定义

$$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j=\Gamma^k{}_{ji}\bar{e}_k, \tag{6.6}$$

其中函数 $\Gamma^k{}_{ji}$ 称为克里斯托弗尔符号. 对于固定的 (i,j)，$\Gamma^k{}_{ji}$ 是向量场 $\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j$ 的第 k 个分量. 请留心 Γ 上指标的次序：与导数相关的指标最后出现. 我们将常用下列简记符号：

$$\nabla_{\bar{e}_i}\equiv\nabla_i. \tag{6.7}$$

在一个 n 维流形中，这 n^3 个函数 $\Gamma^k{}_{ji}$ 完全决定了该仿射联络，而且这往往是描述该联络的最方便的方式. 注意 $\Gamma^k{}_{ji}$ 不是一个张量的分量. 在基的变换下，指标 k 和 i（按(6.5)）象张量指标

那样变换，但是指标 j（按(6.3a)）并非如此。

***习　题　6.2**

证明

$$\Gamma^{k'}_{j'i'} = \Lambda^{k'}_{k}\Lambda^{i}_{i'}\Lambda^{j}_{j'}\Gamma^{k}_{ji} + \Lambda^{k'}_{k}\Lambda^{i}_{i'}(\nabla_i \Lambda^{k}_{j'}),$$

这里 $\nabla_i \Lambda^{k}_{j'}$ 指的是 $\mathrm{d}\Lambda^{k}_{j'}/\mathrm{d}\lambda_i$，其中 $\bar{e}_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_i$，而 $\Lambda^{k}_{j'}$ 看成是 $\bar{e}_i$ 的积分曲线上的函数。

***习　题　6.3**

根据习题 6.1，证明：

$$\{\Gamma^{k}_{ji}\bar{e}_k \otimes \tilde{\omega}^i\}$$

是 n 个 $\binom{1}{1}$ 型张量的一个集合。（这里 $\{\tilde{\omega}^i\}$ 是与 $\{\bar{e}_j\}$ 对偶的一次形式基。）

***习　题　6.4**

在单位球面上，通常的球坐标 θ 和 ϕ 定义了基 $\{\bar{e}_\theta = \partial/\partial\theta,\ \bar{e}_\phi = \partial/\partial\phi\}$，把用于 6.2 节中的推理推广一下，推证

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta,$$

而其他所有的 Γ 为零。（注意，这个问题较难解答。你应该尽量地应用球面的对称性，并且对向量在平移下的行为作出聪明的推测。）

***习　题　6.5**

从(6.6)式和(6.3e)式推证

$$\nabla_i \tilde{\omega}^j = -\Gamma^{j}_{ik}\tilde{\omega}^k. \tag{6.8}$$

既然我们有了基向量的导数，现在就能得出任意张量的导数。作为例子，如果 $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$，那么

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} = U^i\nabla_{\bar{e}_i}(V^j\bar{e}_j) = U^i(\nabla_{\bar{e}_i}V^j)\bar{e}_j + U^iV^j\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j.$$

在第一项中，V^j 是简单的一个函数，因此 $U^i\nabla_i(V^j) = \mathrm{d}V^j/\mathrm{d}\lambda$。所

以我们有

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V}=\frac{\mathrm{d}V^{j}}{\mathrm{d}\lambda}\bar{e}_{j}+U^{i}V^{j}\Gamma^{k}_{ji}\bar{e}_{k}=\left(\frac{\mathrm{d}V^{j}}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^{j}_{ki}V^{k}U^{i}\right)\bar{e}_{j}.$$

为了得出上面最后的表达式，我们必须在最后一项中重新标记某些求和指标. 因为 $\nabla\bar{V}$ 本身是一个张量，它的分量为

$$(\nabla\bar{V})^{j}_{i}=\nabla_{i}(V^{j})+\Gamma^{j}_{ki}V^{k}.$$

对于项 $\nabla_{i}(V^{j})$，稍微说几句. 若 $\bar{e}_{i}$ 是向量 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$，则 $\nabla_{i}(V^{j})=\mathrm{d}V^{j}/\mathrm{d}\mu$，这里 V^{j} 简单地就是沿着参数为 μ 的曲线上的一个函数. 若 $\bar{e}_{i}$ 是一个坐标基向量，则 $\bar{e}_{i}=\partial/\partial x^{i}$，并且有

$$\nabla_{i}V^{j}=\frac{\partial}{\partial x^{i}}V^{j}=V^{j}{}_{,i},$$

其中用到了对微分形式引入的“,”运算符号. 甚至当 $\bar{e}_{i}$ 不是一个坐标基向量时，对于任意函数 f，习惯上也沿用“,”运算符号：

$$\nabla_{\bar{e}_{i}}f=\bar{e}_{i}[f]\equiv f_{,i}. \tag{6.9}$$

当 $\bar{e}_{i}$ 是一个坐标基向量时，这就是通常的偏导数；当 $\bar{e}_{i}$ 不是坐标基向量时，那么这单纯就是 f 沿 $\bar{e}_{i}$ 的导数. 因此我们有

$$(\nabla\bar{V})^{j}_{i}=V^{j}{}_{,i}+\Gamma^{j}_{ki}V^{k}\equiv V^{j}{}_{;i}. \tag{6.10}$$

其中我们对协变导数引入运算符号“;”. 虽然无论 $V^{j}{}_{,i}$ 还是 $\Gamma^{j}_{ki}V^{k}$ 都不按张量变换，但是很清楚，它们的和却按张量变换.

***习　题　6.6**

若 $\tilde{\omega}$ 是一个一次形式，证明

$$(\nabla\tilde{\omega})_{ij}\equiv\omega_{i;j}=\omega_{i,j}-\Gamma^{k}_{ij}\omega_{k}. \tag{6.11}$$

***习　题　6.7**

若 T 是一个 $\binom{N}{M}$ 型张量，证明

$$\begin{aligned}T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;m}=&\,T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l,m}+\Gamma^{i}_{nm}T^{n\cdots j}{}_{k\cdots l}+\cdots+\Gamma^{j}_{nm}T^{i\cdots n}{}_{k\cdots l}\\&-\Gamma^{n}_{km}T^{i\cdots j}{}_{n\cdots l}-\cdots-\Gamma^{n}_{lm}T^{i\cdots j}{}_{k\cdots n}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

*6.5 挠率

$[\bar{U}, \bar{V}]$和$\nabla_{\bar{U}}\bar{V}-\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$这两个向量都是向量场，且对$\bar{U}$和$\bar{V}$都是斜对称的．如果它们相等的话，那么称该联络是**对称的**：

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V}-\nabla_{\bar{V}}\bar{U}=[\bar{U}, \bar{V}] \Leftrightarrow \text{对称联络}. \tag{6.13}$$

这里用了"对称的"这一名称，是因为下列习题所证明的性质的缘故。

*习 题 6.8

证明在**坐标**基中，由(6.13)式能推出，联络为对称的充要条件是

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}. \tag{6.14}$$

对于非对称联络，我们定义**挠率**T^k_{ji}：

$$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j-\nabla_{\bar{e}_j}\bar{e}_i-[\bar{e}_i, \bar{e}_j]\equiv T^k_{ji}\bar{e}_k. \tag{6.15}$$

*习 题 6.9

证明$\{T^k_{ji}\}$是一个$\binom{1}{2}$型**张量**的分量，我们把这个张量称为挠率张量$\mathbf{T}$：

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V}-\nabla_{\bar{V}}\bar{U}-[\bar{U}, \bar{V}]=\mathbf{T}(\quad;\bar{U}, \bar{V}).$$

$\mathbf{T}$中的空位是留给一个一次形式自变量的.

*习 题 6.10

假定在一个流形上定义了两个联络，克里斯托弗尔符号分别为Γ^k_{ij}和Γ'^k_{ij}，证明

$$D^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma'^k_{ij}$$

是一个$\binom{1}{2}$型张量的分量．证明张量$\mathbf{D}$对其向量自变量为对称的充要条

件是，这两个联络有同样的挠率张量。

习题 6.9 和 6.10 表明：通过定义下列克里斯托弗尔符号

$$\Gamma^k_{(S)ij}=\Gamma^k_{ij}-\frac{1}{2}T^k_{ij},$$

我们对任意联络 ∇ 总能定义它的对称部分 $\nabla_{(S)}$. 虽然挠率原则上是联络的一个有用部分，但是在为物理定律构造数学模型时，它却没有对称部分用得那么普遍. 从现在起，除非另外说明，我们将只讨论对称联络. 完成了下面的习题 6.18，这样做的理由就将清楚了. 注意，定义(6.13)式，直接保证了下列结果.

***习　题　6.11**

设流形具有对称联络. 证明：在一个张量的李导数的分量的任意表达式中，所有的“，”符号都可以用“；”符号代替. 例如

$$(\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i=\omega_{i,j}U^j+\omega_jU^j{}_{,i}=\omega_{i;j}U^j+\omega_jU^j{}_{;i}.$$

（当然，所有的“，”符号都必须同时改变，而不是只改变其中的一部分.）

*6.6　测地线

测地线是这样的一条曲线，它的切向量沿着该曲线平行移动. 测地线方程是

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{U}=0. \tag{6.16a}$$

如果 λ 是该曲线的参数，而 $\{x^i\}$ 是任意坐标系，此式可写成

$$\frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^i_{jk}U^jU^k=0, \tag{6.16b}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}=0. \tag{6.16c}$$

这一方程是 $x^i(\lambda)$ 的拟线性微分方程组，是该曲线的方程。

*习 题 6.12

请回忆一下:我们对曲线的定义是包括它的参数在内的. 如果 λ 是一个使(6.16c)成立的参数,证明:把参数变为

$$\mu = a\lambda + b, \tag{6.17}$$

也给出(6.16c)的一个解,这里 a 和 b 都是常数. 测地线的参数称为**仿射**参数.

注意,仅仅联络的对称部分对测地线方程才有贡献. 这就给出了一个表明挠率的几何效应的方法. 过 P 点取一条测地线,它以 $\bar{U}$ 为切向量. 在 T_P 选取一个$(n-1)$维的线性子空间 R_P(n 是流形的维数),它与 $\bar{U}$ 线性无关. 在 R_P 中选一个向量 $\bar{\xi}$,且过 P 作出与 $\bar{\xi}$ 相切的测地线. 应用该联络的对称部分,把 $\bar{U}$ 沿 $\bar{\xi}$ 平移一个小的仿射参数距离 ϵ. 在这个新的点作一根新的测地线切于那里的 $\bar{U}$(参见图 6.5). 这一测地线几乎与最初的测地线平行. 用这种方法,P 点邻域中的任意点都能给出一根与 $\bar{U}$"平行"的测地线. 沿着测地线的这一线汇,我们能把原来的"连接"向量 $\bar{\xi}$ 以两种方法移动:或是通过平行移动,或是通过李拉曳. 设 $\bar{\xi}$ 是平行移动的,根据(6.15)式,我们有

$$(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i - T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

然而初始向量 $\bar{\xi}$ 具有性质 $\nabla_{(S)\bar{\xi}}\bar{U}=0$, 因此最初有$(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}U^j\xi^k$. 所以,我们有初始值

$$(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -\frac{1}{2}T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

这一等式所指的意思是,向量 $\bar{\xi}$ 通过一个**对称**联络给出的平行移动将保持"附属"于我们已构成的测地线的平行线汇. 但是如果联络不是对称的,这一向量就不能保持固定在这一线汇之中.

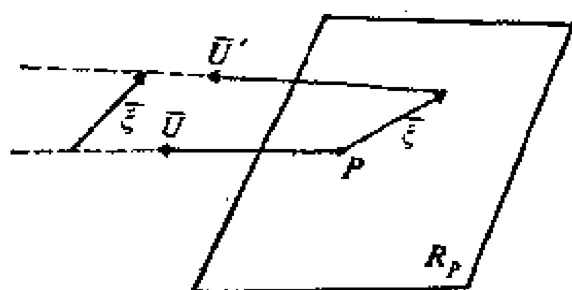


图 6.5 两条平行的测地线 $\bar{U}$ 和 $\bar{U}'$ 以及在平面 R_P 中连接它们的向量 $\bar{\xi}$，$\bar{\xi}$ 将它沿着 $\bar{U}$ 平行移动。如果有挠率，那么它离 $\bar{U}'$ 旋转开去。

粗浅地说，由于挠率的作用，它相对于附近的测地线"转动"了。反之，如果我们把被平行移动的向量 $\bar{\xi}$，按其移动的方向，看成定义了一个"固定"的方向，那么"平行"的测地线线汇绕着 $\bar{\xi}$ 在其上的那条测地线扭曲。（然而，在没有度规时，我们是不能精确地定义"转动"和"扭曲"这些概念的。）

*6.7 正规坐标

采用一个基于测地线的坐标系，对下面的讨论是有帮助的。为了构成这种坐标系，我们注意到，通过一点 P 的测地线给出了 P 点的一个邻域到 T_P 的原点的一个邻域上的一个 1-1 映射。这种映射的产生是因为 T_P 的每一个元素定义了过 P 点的一条唯一的测地线，因此我们可以把 T_P 中的向量与沿着此曲线的与 P 点相距仿射参数距离为 $\Delta\lambda=1$ 的点相关联。（回忆一下，如果 T_P 中两个元素是平行的，则它们的测地线具有相同的路径，但参数不同，因此该映射选出这一路径上的不同点。）应用这一映射，并对 T_P 选取一个任意的基，我们把一点 Q 的正规坐标定义为 T_P 中与该点相关联的向量的分量。这个映射一般只在 P 的某一邻域中才是 1-1 的，因为测地线在一弯曲流形上可能会彼此交叉。对于某些联络（诸如平直空间的联络）而言，这一映射在整个流形上是 1-1 的。（从 T_P 到流形上的映射是定

义得很好的，即使测地线交叉也是如此。我们把这种映射称为指数映射）如果对于T_P(所有点P)中的所有元素，它都有定义，那么称该流形是测地完备的.就我们的目的而言，正规坐标的重要意义在于：在P点有$\Gamma^i_{jk}=0$(但是在P的邻域中并不是处处都这样的)。为了看到这一点，注意到如果以$U^i(P)$为分量的向量$\overline{U}$定义一条测地线，那么沿该曲线仿射参数为λ的点的坐标简单地就是$x^i=\lambda U^i(P)$，这里我们沿用在P点取$\lambda=0$的习惯做法。所以$d^2x^i/d\lambda^2$为零，而(6.16c)式告诉我们，$\Gamma^i_{jk}U^k(P)U^j(P)$沿整个曲线必须为零。然而在$P$点，$U^i$有任意的方向，这就意味着$\Gamma^i_{jk}(P)=0$。

在一点总可以选择一个坐标系，使得Γ^i_{jk}为零，这一事实在证明下面的好多定理中是很有用的。因为在其他各点Γ^i_{jk}不一定为零，所以Γ^i_{jk}在P点的导数就不等于零。

*6.8 黎曼张量

我们也许会期望两个协变导数的下列换位子

$$[\nabla_U,\ \nabla_V]\equiv\nabla_U\nabla_V-\nabla_V\nabla_U,$$

它应该是一个微分算子。不过，事实上它有下列异常的性质：由

$$[\nabla_{\overline{U}},\ \nabla_{\overline{V}}]-\nabla_{[\overline{U},\overline{V}]}\equiv\mathbf{R}(\overline{U},\ \overline{V}) \qquad (6.18)$$

定义的算子$\mathbf{R}$是一个乘法算子。甚为奇怪的是$\mathbf{R}$与$\overline{U}$和$\overline{V}$的导数无关。对这些性质的说明及证明见下列习题。

*习　题　6.13

对于任意函数f，证明

(a) $\mathbf{R}(\overline{U},\ \overline{V})f\overline{W}=f\mathbf{R}(\overline{U},\ \overline{V})\overline{W}$,

(b) $\mathbf{R}(f\overline{U},\ \overline{V})\overline{W}=f\mathbf{R}(\overline{U},\ \overline{V})\overline{W}$.

因为这些性质，(6.18)式确实定义了一个张量，它称为黎曼

张量. 给定向量$\bar{U}$, $\bar{V}$, (6.18)式表明, $\mathbf{R}(\bar{U}, \bar{V})$是一个$\binom{1}{1}$型张量, 因为把左边作用在一个向量上将给出一个新向量. 把$\bar{U}$和$\bar{V}$也看成是可变量, 则黎曼张量成为一个$\binom{1}{3}$型张量.(注意: 我们这里用来定义黎曼张量的(6.18)式和(6.19)式并不是每个作者都采用的. 其他的定义可能在符号和自变量的次序上不同. 当你参考其他书籍的时候, 请查明所用的定义. 我们的定义按照 Misner, Thorne & Wheeler(1973)给出.)

*习 题 6.14

黎曼张量的分量 R^l_{jki} 由下式定义:

$$[\nabla_i, \nabla_j]\bar{e}_k - \nabla_{[\bar{e}_i, \bar{e}_j]}\bar{e}_k = R^l_{kij}\bar{e}_l. \tag{6.19}$$

(a) 证明在坐标基下,

$$R^l_{kij} = \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj}. \tag{6.20}$$

(b) 在一个非坐标基中,用下式定义换位系数 C^i_{jk}:

$$[\bar{e}_j, \bar{e}_k] = C^i_{jk}\bar{e}_i. \tag{6.21}$$

证明

$$R^l_{kij} = \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj} - C^m_{ij}\Gamma^l_{km}, \tag{6.22}$$

这里$f_{,i} \equiv \bar{e}_i[f]$.

(c) 证明

$$R^l_{k(ij)} \equiv \frac{1}{2}(R^l_{kij} + R^l_{kji}) = 0, \tag{6.23a}$$

和

$$R^l_{[kij]} = 0. \tag{6.23b}$$

(提示: 应用正规坐标, 证明(6.23b)式. 该结果当然是与基无关的.)

(d) 应用(c)证明: 在一个 n 维流形中, R^l_{kij} 线性独立的分量的个数是

$$n^4 - n^2\,\frac{n(n+1)}{2} - n\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{1}{3}\,n^2(n^2-1). \tag{6.24}$$

*习 题 6.15

证明

$$R^{l}_{k[ij;m]}=0. \tag{6.25}$$

这些恒等式称为比安基恒等式.（提示：也应用正规坐标证明.）证明在一个坐标基中，这一结果等价于协变导数的下列雅可比恒等式：

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]]+[\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]]+[\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]]=0.$$

比较(2.14)式和(3.9)式.

*6.9 黎曼张量的几何解释

象解释我们研究过的另一换位子$[\bar{U}, \bar{V}]$一样，这也包含了闭的或几乎闭的回路. 我们的方法基于协变导数的指数，因此非常类似于讨论李括号时所用的方法. 如果沿一条切线为$\bar{U}$的曲线定义了一个向量场$\bar{A}$，那么平行移动使我们把$\bar{A}$从此曲线上的任意点Q移动到任意其他点P. 这样产生的T_P中的向量$\bar{A}(Q\to P)$(一般与$\bar{A}(P)$不同)称为$\bar{A}(Q)$在P点的象. 当然它与曲线有关. 事实上，如果$\bar{A}$和$\bar{U}$都是解析的，我们就有下列泰勒级数：

$$\begin{aligned}\bar{A}(Q\to P)&=\bar{A}(P)+\lambda\nabla_U\bar{A}(P)+\frac{1}{2}\lambda^2\nabla_U\nabla_U\bar{A}(P)+\cdots\\&=\exp[\lambda\nabla_U]\bar{A}|_P,\end{aligned} \tag{6.26}$$

这里λ是此曲线的参数($\bar{U}=d/d\lambda$)，而其中使用的符号"exp"与以前一样，它正好是第一个等式的缩记.

现在考察两个具有切线$\bar{U}=d/d\lambda$和$\bar{V}=d/d\mu$，且$[\bar{U}, \bar{V}]=0$的线汇. 所以正如图6.6所明示的，它们的相交组成闭合的回路. 如果我们沿图示的一条曲线$\bar{V}$，把一个向量从某一点R平行移动到Q，那么我们在Q点定义了一个向量

$$\bar{A}(R\to Q)=\exp[\mu\nabla_V]\bar{A}|_Q,$$

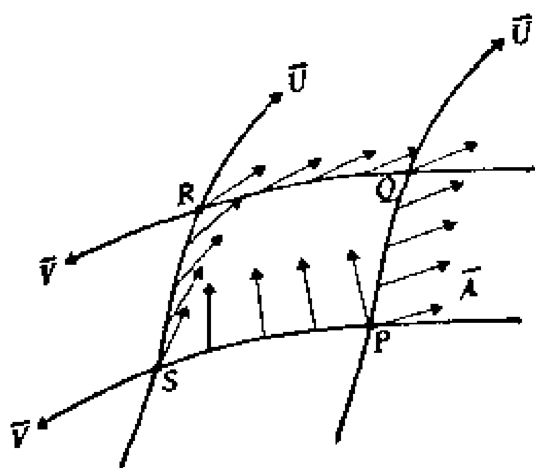


图 6.6 把一个向量绕一闭合回路平行移动一周，当它回到原处时，一般与它出发时已不同了。

这里μ是从Q到R的参数距离．然后，我们再把上述向量从Q平行移动到P．我们在P点就有用下列符号标记的一个向量：

$$\overline{A}(R\to Q\to P)=\exp[\lambda\nabla_{\overline{U}}]\exp[\mu\nabla_{\overline{V}}]\cdot\overline{A}|_P,$$

这里λ是从P到Q的参数距离．我们还可以用另一种方法来进行上述平行移动，即先移到S(沿一条$\overline{U}$曲线移动距离λ)，然后再移到P(沿一条$\overline{V}$曲线移动距离μ)．因为$\overline{U}$和$\overline{V}$可交换，所以这里的λ和μ的值就和前面的λ和μ的值一样．第二种方法，会给出

$$\overline{A}(R\to S\to P)=\exp[\mu\nabla_{\overline{V}}]\exp[\lambda\nabla_{\overline{U}}]\overline{A}|_P.$$

两种方法产生的差别(我们将记为$\delta\overline{A}$)，在λ和μ很小时，可以用泰勒级数展开求得：

$$\delta\overline{A}=[e^{\lambda\nabla_{\overline{U}}},\ e^{\mu\nabla_{\overline{V}}}]\overline{A}$$
$$=\left[1+\lambda\nabla_{\overline{U}}+\frac{1}{2}\lambda^2\nabla_{\overline{U}}\nabla_{\overline{U}},\ 1+\mu\nabla_{\overline{V}}+\frac{1}{2}\mu^2\nabla_{\overline{V}}\nabla_{\overline{V}}\right]\overline{A}+O(3),$$

这里$O(3)$表示$\mu^n\lambda^m(n+m\geqslant 3)$的一些项．计算上式，有

$$\delta\overline{A}=\lambda\mu[\nabla_{\overline{U}},\ \nabla_{\overline{V}}]\overline{A}+O(3), \qquad (6.27)$$

自然，这正好就是黎曼张量，且不包含$\overline{A}$的导数．从另一个观点去看，如果我们把$\overline{A}$绕回路$PQRSP$平行移动一周，这将是

$\bar{A}$ 产生的变化. 这一变化正好就是黎曼张量与此回路的"面积" $\lambda\mu$ 的乘积:

$$\delta A^i = \lambda\mu R^i_{jkl} A^j U^k V^l.$$

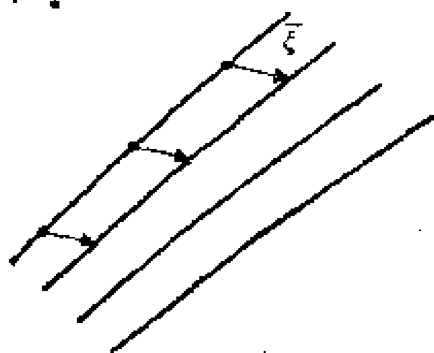


图 6.7 连接向量 $\bar{\xi}$, 它是沿着一个测地线线汇李拉曳的.

黎曼张量的另一个重要的几何方面是测地线偏差, 即开始平行的测地线不能继续保持平行. 为了把它精确地测量出来, 我们考察具有切线 $\bar{U}(\nabla_{\bar{U}}\bar{U}=0)$ 的一个测地线线汇, 以及一个连接向量 $\bar{\xi}$, 它由此线汇所李拉曳($\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{\xi}=0$)(参见图 6.7). $\bar{\xi}$ 沿着 $\bar{U}$ 改变的情况将用来测量测地线偏差. $\bar{\xi}$ 的一阶导数 $\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi}$ 与初始条件有关, 即与这些测地线最初建立时是否平行有关. 而几何进入二阶导数 $\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi}$ 之中, 这一导数告诉我们测地线的初始分离率是如何改变的. 因此我们有

$$\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi} = \nabla_{\bar{U}}(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{\xi} + \nabla_{\bar{\xi}}\bar{U}) = \nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U} = [\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{\xi}}]\bar{U} + \nabla_{\bar{\xi}}\nabla_{\bar{U}}\bar{U}.$$

其中第一步应用了习题 6.11 的结果. 因为 $\bar{U}$ 是一条测地线, 所以最后一个等式中的最后一项为零, 因此我们有

$$\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi} = \mathbf{R}(\bar{U}, \bar{\xi})\bar{U}, \qquad (6.28a)$$

或者用分量形式表示, 即是

$$(\xi^i{}_{;j}U^j)_{;k}U^k = R^i_{jkl}U^jU^k\xi^l.$$

注意, 因为 $U^i{}_{;k}U^k=0$, 上式左边可以简化, 因此我们有

$$\xi^i{}_{;jk}U^jU^k = R^i_{jkl}U^jU^k\xi^l. \qquad (6.28b)$$

方程(6.28b)称为测地线偏差方程.

*6.10 平直空间

平行线延长后永不相交这一欧里几得公理是平直空间的定

义公理．由(6.28)式显然可知，这表明空间为平直的充要条件是它的黎曼张量为零．因此，黎曼张量可以用来度量一个具有联络的流形的曲率．根据(6.27)式，平直空间有一个整体平行的概念：此时可以说 R 点的一个向量平行 P 点的一个向量，因为 R 点的这个向量可以平行移动到 P 点，且与移动的路径无关．因此在一平直空间中，所有的切空间 T_P 都可以彼此同化．而且指数映射可以无限制地加以推广(只要该流形的整体拓扑没有通过"剪切和粘贴"使之人为地复杂化)，而整个流形就可以与其切空间同化．注意，这一切都不需要度规张量．闵可夫斯基空间就象欧几里得空间一样是平直的．

***习　题 6.16**

考虑一个二维平直空间，它的笛卡儿坐标为 x, y，而极坐标为 r, θ.

(a) 应用 $\vec{e}_x$ 和 $\vec{e}_y$ 是整体平行向量场(对于任意 P, Q, $\vec{e}_x(P)$平行于 $\vec{e}_x(Q)$)，证明在极坐标中

$$\Gamma^r_{\theta\theta}=-r,\ \Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=1/r,$$

而其他所有的分量都为零．

(b) 对于任意向量场 $\vec{V}$，对极坐标用分量 V^r 和 V^θ 来计算 $\nabla_i V^j$ 和 $\nabla_i V^i$.

(c) 对于基 $\hat{r}=\partial/\partial r$, $\hat{\theta}=(1/r)\partial/\partial\theta$，求出所有的克里斯托弗尔符号．

(d) 取(c)中的基，再计算一下(b)．

这个习题给出了很重要的一点：虽然在一个平直流形中，存在着使 $\Gamma^i_{jk}=0$ 的坐标，但是也可能选取一些坐标，在这些坐标中，这些 Γ^i_{jk} 并不为零．

*6.11　联络与体积测度或度规的相容性

如果流形不仅有联络而且还有体积形式或度规，那么我们

通常提出某种相容性要求. 例如, 联络和体积形式都能用来定义一个向量场 $\bar{V}$ 的散度. 协变散度是 $\nabla\cdot\bar{V}=\nabla_i V^i$. 而体积形式散度定义为

$$\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}=(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\tilde{\omega}.$$

如果对于所有 $\bar{V}$ 都有 $\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V}=\nabla\cdot\bar{V}$, 那么称 ∇ 和 $\tilde{\omega}$ 是**相容的**.

***习 题 6.17**

(a) 证明 ∇ 和 $\tilde{\omega}$ 是相容的, 当且仅当 $\nabla\tilde{\omega}=0$. (提示: 应用习题 6.11 计算 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$.)

(b) 在坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 下, 假定 $\omega_{12\cdots n}=f$. 证明 ∇ 和 $\tilde{\omega}$ 是相容的, 当且仅当对于所有的 k, 有

$$(\ln f)_{,k}=\Gamma^j_{jk}.$$

类似地, 如果流形有一个度规张量 $\mathbf{g}|$, 那么此时也有一个自然的相容性要求. 两个向量 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 在点 P 处有内积 $\mathbf{g}|(\bar{A}, \bar{B})$. 如果这一内积在任意向量 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 沿任意曲线的平行移动下不变, 那么称 ∇ 和 $\mathbf{g}|$ 是相容的.

***习 题 6.18**

(a) 证明 ∇ 和 $\mathbf{g}|$ 是相容的, 当且仅当

$$\nabla\mathbf{g}|=0. \tag{6.29}$$

(b) 证明在坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 下 ∇ 和 $\mathbf{g}|$ 相容的充要条件是

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k}+g_{lk,j}-g_{jk,l}), \tag{6.30}$$

这里 g^{ij} 是元素为 g_{lm} 的矩阵的逆矩阵的矩阵元(参见(2.55)式). (提示: 利用 $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$ 这一对称性.)

***习 题 6.19**

回忆一下: 如果我们有度规, 习题 4.13 使我们能定义一个好体积形

式.（这是另一个相容性，即度规和体积形式的相容性.）如果度规和联络是相容的，证明用附好体积形式和联络是相容的.（提示：必须证明 $g_{,k}=g^{ij}g_{ij,k}$. 为此可应用(4.39)式.）

(6.30)式表明了下列值得注意的事实：度规确实唯一地确定了相容的对称联络. 这种联络称为**度规联络**.

***习　题　6.20**

证明对于任意向量 $\bar{V}$，有

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\ \mathbf{g})_{ij}=\nabla_i V_j+\nabla_j V_i.$$

所以开林向量(参见3.11节)满足**开林方程**：

$$\nabla_i V_j+\nabla_j V_i=0.$$

参见方程(5.89).

*6.12　度规联络

因为(6.30)式是对联络的一个很强的限制，因此度规联络具有一般对称联络所没有的一些附加性质. 为了导出其中的一些性质，使用正规坐标是最为方便的. 注意到，(6.29)式和(6.30)式意味着

$$\Gamma^i_{jk}=0(\text{在 } P \text{ 点})\Leftrightarrow g_{lm,n}=0(\text{在 } P \text{点}). \qquad (6.31)$$

***习　题　6.21**

证明(6.20)式，(6.30)式和(6.31)式意味着在 P 点的正规坐标中，有

$$R_{ijkl}\equiv g_{im}R^m_{jkl}=\frac{1}{2}(g_{il,jk}-g_{ik,jl}+g_{jk,il}-g_{jl,ik}). \qquad (6.32)$$

***习　题　6.22**

(a) 证明从(6.32)式能推出下列恒等式：

$$R_{ijkl}=R_{klij}. \qquad (6.33)$$

(b) 对于一个 n 维流形，证明从(6.33)式和(6.23)式能推出：R_{ijkl} 中线性无关分量的个数是

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{12}n^2(n^2-1).$$

***习　题　6.23**

(a) 用下式定义里奇张量 R_{kl}：

$$R_{kl}=R^i_{kil},\tag{6.34}$$

用下式定义里奇标量 R：

$$R=g^{kl}R_{kl}.\tag{6.35}$$

证明 R_{ij} 是对称的。

(b) 证明用缩并的比安基恒等式

$$R^i_{j[kl;m]}=0 \text{ 和 } g^{jk}R^i_{j[il,m]}=0$$

能推出

$$\left(R^{ij}-\frac{1}{2}Rg^{ij}\right)_{;j}=0.\tag{6.36}$$

(对 R_{lm} 上升指标成 R^{ij} 是用度规来完成的：$R^{ij}=g^{il}g^{jm}R_{lm}$.)

(c) 定义韦尔张量：

$$C^{ij}_{kl}=R^{ij}_{kl}-2\delta^{[i}_{[k}R^{j]}_{l]}+\frac{1}{3}\delta^{[i}_{[k}\delta^{j]}_{l]}R.\tag{6.37}$$

证明对 C_{ijkl} 的任意一对指标缩并都得到零：它是一个"纯"四秩张量。

方程(6.36)在爱因斯坦的引力理论(广义相对论)中起着基本的作用．在其中时空用一个具有度规的四维流形(平直的闵可夫斯基时空的一个推广)来表示．真空(无源)引力场(即度规)是通过解下列微分方程

$$G^{ij}\equiv R^{ij}-\frac{1}{2}Rg^{ij}=0\tag{6.38}$$

而求得的，其中 G^{ij} 称为爱因斯坦张量．(6.36)式表明的一些恒等式把(6.38)式中独立方程的个数从10个$(=\frac{1}{2}n(n+1),$

因为 G^{ij} 是对称的)减少到6个. 这就保证，解 g_{ij}(也有10个独立分量)只能确定到由 g_{ij} 的坐标变换表示的4个函数的自由度。

*习 题 6.24

证明连接 P 和 Q 两点的测地线，是在连接 P 和 Q 的所有曲线中具有极值长度的一条曲线. 通过改变 $x^i(\lambda)$，使之偏离测地线来证明下列积分精确到一阶时是不变的：

$$\int_P^Q \left| g\left(\frac{d\bar{x}}{d\lambda}, \frac{d\bar{x}}{d\lambda}\right)\right|^{1/2} d\lambda.$$

利用这一方法来证明测地线的极值性.（记住：任意曲线都有唯一的参数，而测地线的参数必定是仿射的.）如果度规是不定的，讨论一下上述积分中的绝对值符号为什么是必要的，特别单独讨论一下零测地线（长度为零）的情况。

*6.13 仿射联络和等价原理

我们是通过研究平直的流形，欧几里得三维空间，伽利略时空（虽然也许我们并不这样称呼它），以及稍后的闵可夫斯基时空来学习初等几何和物理的. 另一方面，广义相对论却应用了弯曲时空. 似乎会自然地认为平直的空间是最简单的一类空间. 但是从流形理论的观点来看，甚至平直空间也决不是简单的. 因为它有仿射联络，它就比通常的微分流形有更多的结构. 虽然存在这种联络，但它并没有侵入到初等几何和物理中去，因为我们通常采用使克里斯托弗尔符号为零的直角坐标系. 但是，如果在平直空间中，使用曲线坐标来表达物理定律，那么就必须用到克里斯托弗尔符号，而联络就显现出来了.

看来好象这是一种应当避免的复杂性. 但是请考虑一下，

为了推广，这样做是有潜力的. 用这种方法写出的大部分物理定律包含了克里斯托弗尔符号，但没有黎曼张量，因此这些方程是有意义的：不论流形是平直的还是弯曲的，它们都是一样的. 所以，假定物理定律在广义相对论的弯曲时空中，与它们在闵可夫斯基空间的平直时空中正好具有同样的数学形式，这就很自然了. 这一假设称为(物理场与时空曲率的)最小耦合原理，或者强等效原理. 这一原理被广泛采用，且与实验一致. 对它的详尽讨论可以参考 Misner *et al.*(1973). 这里应该强调的是下列相当值得注意的情况：把平直空间中的物理定律用曲线坐标表达，我们就得到该定律在弯曲空间中的形式. 这一情况可以追溯到下列事实：平直空间虽然曲率为零，但有一个完全确定的联络，所以它只是一类特殊的"弯曲"空间.

*6.14 联络和规范理论：电磁理论的例子

"规范理论"是有关基本粒子相互作用的一大类理论的统称，这些理论有一个共同的特征：在该场论的基本变量的变换群下，它的物理预言都不改变. 电磁理论是最为熟悉的例子：如果把基本变量取为一次形式("向量")势 $\tilde{A}$，那么该理论的物理预言在规范变换 $\tilde{A}\to\tilde{A}+\tilde{d}f$ 下不变. 类似地，"规范"这一名词也用来描述所有这些理论中的变换. 对规范理论的一般讨论已超出本书的范围(可参阅参考文献中列出的 Trautman(1973) 的讲义). 我们只限于讨论电磁理论，并用质量为 m，自旋为零的荷电粒子的方程来说明它. 我们将看到，此时会自然地产生一种与仿射联络不同，但本质上一致的联络，并且特别地，竟会使我们"创造出"电磁场!

首先考虑质量为 m 的中性标量粒子，它的波函数满足克莱因-高登方程以及(守恒的)归一化条件：

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2)\psi = 0, \quad \int \mathrm{d}^3 x (\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*) = 1, \qquad (6.39)$$

这里希腊指标取遍(t, x, y, z)，而且为了简单起见，我们在其中假定了闵可夫斯基时空度规．显然，若ψ是一个解，则$\psi e^{i\phi}$也是一个解，这里ϕ是任意实常数．$\psi \to \psi e^{i\phi}$，这是一个规范变换．现在我们来进行一个类推，这将贯穿在我们整个的讨论之中．上述一些规范变换是一类受到很大限制的规范变换，因为ϕ不能与位置有关．这类似于在狭义相对论中用直角坐标来描述某个（任意）物理体系时的坐标自由度．允许的坐标变换是转动、洛伦兹推动和平移，而它们都是刚性的：我们不能在某一点进行一个变换，而在某处另一点进行一个不同的变换．在狭义相对论中，为了允许我们应用任意的坐标，就要放松这一限制．正如我们在上一节中所看到的，为了保持有一个与坐标无关的导数（即协变导数），这就迫使我们引入仿射联络．一旦当写出的物理体系的运动方程组中有联络的话，那么当联络不是平直时，使用它们也是自然的．这结果就成了该体系在广义相对论中的合适方程．推广坐标自由度的这个过程，就导致了体系与引力场相互作用方式的一种理论．类似地，我们现在将推广场ψ的规范自由度，由此自动地给出一个场与电磁场相互作用的理论．

这种推广是显然的：我们希望有一个一般的规范变换：

$$\psi \to \psi e^{i\phi(\bar{x})}, \qquad (6.40)$$

这里的ϕ现在是闵可夫斯基时空中位置$\bar{x}$的任意实函数．但是因为场方程包含导数，(6.40)式就会产生下列改变：

$$\tilde{\mathrm{d}}\psi \to (\tilde{\mathrm{d}}\psi + \mathrm{i}\psi\tilde{\mathrm{d}}\phi) e^{i\phi(\bar{x})}. \qquad (6.41)$$

为了看出如何消去这一多余的项，让我们更多地从几何方面去看待这一情况．因子$e^{i\phi}$是单位圆上的一个复数，规范变换是$U(1)$群（一维复空间中的酉群）对ψ作用的表示．因此变换$\psi \to$

$\psi e^{i\phi(\tilde{x})}$可以看成是在每一点$\tilde{x}$选出了$U(1)$中的一个元，并让它作用在$\psi$上．这里的自然几何结构是纤维丛，它的底流形是闵可夫斯基时空，而它的纤维是$U(1)$群(可以把它具体化为复平面中的单位圆)．因此，(6.40)式表示的一个规范变换就是该纤维丛上的一个截面．我们将把这个丛称为$U(1)$丛．

现在，我们想研究的对象并不是ψ自身，而是$\nabla_\mu\psi$．在任意点P，$\nabla_\mu\psi$是T_P^*(P点的一次形式的向量空间)中的一个元．在底流形中考察一条参数为λ的曲线$\mathscr{C}$．当我们沿着这条曲线移动时，我们会遇到一次形式$\tilde{d}\psi$的一个序列，每一点有一个．如果ψ满足克莱因-高登方程(6.39)式，我们则称$\tilde{d}\psi$沿着$\mathscr{C}$以"正确的"方式改变着．在规范变换中有那么一小部分($\phi=$常数)，它们使得新的$\tilde{d}\psi$也是"正确的"．假定我们进行一个任意的规范变换．于是对于底流形中的曲线$\mathscr{C}$，在$U(1)$丛中相应有一条曲线$\mathscr{C}^*$，它穿过$\mathscr{C}$的每一点上的纤维，通过处是该纤维上与$\mathscr{C}$的那一点的规范变换相对应的那一点($U(1)$中的元素)．如果这个变换不是常值的(即若$\mathscr{C}^*$"不平行"$\mathscr{C}$)，那么变换后的ψ的梯度就"不正确"了：它与原来ψ的梯度不相等(确定到位相)．因此我们将在底流形上定义联络一次形式$\tilde{A}$，它依赖于曲线$\mathscr{C}^*$，使得能校正ψ的导数．它的定义是

(i) 若ψ满足(6.39)式，则$\tilde{A}=0$．

(ii) 在变换$\psi\to\psi e^{i\phi(\tilde{x})}$下，联络一次形式$\tilde{A}$如下变换：

$$\tilde{A}\to\tilde{A}+\tilde{d}\phi. \tag{6.42}$$

(iii) ψ的规范协变导数是

$$\tilde{D}\psi=\tilde{d}\psi-i\psi\tilde{A}. \tag{6.43}$$

性质(ii)和(iii)意味着$\tilde{D}\psi$在规范变换下改变为$e^{i\phi(\tilde{x})}\tilde{D}\psi$．性质(i)保证$\tilde{D}\psi$在$\mathscr{C}$上是"正确的"．

现在让我们来说明为什么把$\tilde{A}$称为联络．仿射联络由克

里斯托弗尔符号表示，把它们加到通常的偏导数中去是为了得到一个“正确的”导数：能给出平行移动的导数(比较(6.43)式和(6.10)式)．为了保持导数的“正确性”，克里斯托弗尔符号在坐标改变下的变换方式必须依赖于坐标的变化(习题6.2)，这非常类似于$\widetilde{A}$在规范变换(6.42)式下的改变．这两种联络之间的差别在于它们企图保持的对象不同：仿射联络保持平行性，而一次形式联络保持规范变换下梯度的不变性．

我们现在把克莱因-高登方程写成规范协变形式：

$$D_\mu D^\mu \psi - m^2\psi = (\nabla_\mu - \mathrm{i}A_\mu)(\nabla^\mu - \mathrm{i}A^\mu)\psi - m^2\psi = 0. \tag{6.44}$$

如果ψ的位相是“正确的”，这一方程便简化为通常的克莱因-高登方程，而且对一个“正确的”ψ通过任意规范变换而得到的任意ψ满足(6.44)式．

仿射联络的曲率张量可以用一个象(6.18)式那样的等式，在一个坐标系中加以定义：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = R^\alpha_{\ \beta\mu\nu}V^\beta.$$

这里类似地有

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = F_{\mu\nu}\psi. \tag{6.45}$$

直截了当的计算表明：分量为$F_{\mu\nu}$的**规范曲率二次形式**$\widetilde{F}$简单地就是

$$\widetilde{F} = -\mathrm{i}\tilde{\mathrm{d}}\widetilde{A}. \tag{6.46}$$

显然$\widetilde{F}$是**规范不变的**(参见上面的(ii))．(黎曼张量是坐标不变的．)克莱因-高登方程是**规范平直的**($\widetilde{F}=0$)，因为存在着一个规范，在其中$\widetilde{A}=0$．但是，因为(6.46)式与电磁理论中的情况是很相似的($\widetilde{A}$=一次形式势，$\mathrm{i}\widetilde{F}$=法拉第张量，参见第五章)，因此颇有吸引力的是把(6.44)式看成是克莱因-高登方程在带电粒子与外电磁场$\widetilde{F}$有相互作用情况下的推广．事实上，确实

是这样．而且(6.44)式能更直接地从下列事实推得：经典粒子在外电磁场中的正则动量是 $\bar{p}_o=\bar{p}+(q/c)\bar{A}$，这里的 $\bar{p}$ 是粒子的"真正的"四维动量．根据对应原理，方程 $\bar{p}\cdot\bar{p}+m^2=0$ 为(使用 $\hbar=c=1$ 的单位制)

$$(-i\nabla_\mu-qA_\mu)(-i\nabla^\mu-qA^\mu)+m^2\psi=0.$$

这表明了(6.44)式是这种粒子(电荷 $q=1$)的波动方程．我们讨论的结果可总结如下：质量为 m 而电荷为 q 的标量粒子，在具有一次形式势 $\tilde{A}$ 的外电磁场中，满足下列方程：

$$(\nabla_\mu-iqA_\mu)(\nabla^\mu-iqA^\mu)\psi-m^2\psi=0. \tag{6.47}$$

而规范变换为

$$\tilde{A}\to\tilde{A}+\tilde{d}\phi, \tag{6.48a}$$

$$\psi\to\psi e^{i\phi/q}. \tag{6.48b}$$

我们可以把 $\tilde{A}$ 看成为 $U(1)$ 丛上的联络，而 $\tilde{F}$ 作为它的曲率。

***习　题　6.25**

(a) 证明在规范变换下有 $\tilde{D}\psi\to e^{i\phi(\bar{x})}\tilde{D}\psi$.

(b) 证明(6.46)式。

*6.15　参考文献

黎曼几何的一本非常完整的参考书是：

S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, two volumes (Interscience, New York, 1963; 1969).

伪黎曼几何(具有不定度规的度规联络)的很好的近代引论，见：

C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973);

S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973);

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

对规范理论中联络作用的更完整的说明，见：

A. Trautman, Infinitesimal connections in physics, in the *Proceedings of the International Symposium on New Mathematical Methods in Physics*, ed. K. Bleuler & A. Reetz (Bonn, 1973).

也请参看：

R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics*, two volumes (Benjamin, Reading, Mass., 1970).

从物理学家的观点来描述规范理论的，请参看：

J. C. Taylor, *Gauge Theories of the Weak Interactions* (Cambridge University Press, 1976).

对联络在更广意义上的数学讨论可参看：

Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette & M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977).

对纤维丛上联络的综述性论文，可见：

B. Carter, Underlying mathematical structures of classical gravitation theory, in *Recent Developments in Gravitation*, ed. M. Levy & S. Deser (Plenum, New York, 1979).

一旦引入仿射联络以后，就有许多其他课题可以研究了．例如，李群有一个自然的仿射联络，它使得单参数子群成为群流形中的测地线．在 Misner *et al.*（如上所引）的一系列习题中，一步步地研究了这一构造．

挠率在引力论中可能会起作用，这首先由嘉当提出．爱因斯坦-嘉当引力理论，后来受到了很大的关注．请参考：

A. Trautman, *Bull. de l'Academie Polonaises des Sciences* (math., astr., phys.) **20**, 185–90 (1972).

从度规张量的分量来计算黎曼张量是不容易的．使用嘉当的活动标架法，会稍容易些．这个方法用到了微分形式的演算．参看 Misner *et al.*,（如上所引）．

虽然我们没有讨论复流形的微分几何，但是它是很有趣的，且在今后的物理应用中可能起很大的作用。为物理学家编写的一本入门书是：

E. J. Flahery, *Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity* (Springer, Berlin, 1976).

这一方面的一本标准数学参考书是：

S. S. Chern, *Complex Manifolds Without Potential Theory* (D. Van Nostrand, New York, 1967).

附录：1. 部分习题的解答和提示

第二章

2.1 $[\hat{r}, \hat{\theta}] = -\hat{\theta}/r \neq 0$.

2.2 (b) 因为 $a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda + b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu = b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu + a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$，(2.13)式意味着 $\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]\exp[b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] = \exp[b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]$，而这当然说明 $[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] = 0$. 反过来，若在(2.13)式的右边，$\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 的次序无关紧要，那么它们的运算确象实数一样，而对于实数，(2.13)式是成立的.

2.3 展开每一项，即 $[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}] = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} - \bar{Y}\bar{X}\bar{Z} - \bar{Z}\bar{X}\bar{Y} + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X}$. 把其中每一项都解释为作用在函数上的微分算子. C^2 的要求保证每一项都存在. 把(2.14)式中的三项都这样展开以后，就得到所求结果了.

2.4 每一个矩阵是一个$\binom{1}{1}$型张量，它需要一个向量与一个一次形式才能给出一个实数. 因为这里包含了两个矩阵，所以当供给两个向量和两个一次形式后，变换就能产生一个数. 线性性是容易验证的.

2.5 (a) 在 n 维时，一个$\binom{2}{0}$型张量有 n^2 个独立分量，而两个向量一共只有 $2n$ 个分量. 一般来说，这是不充足的.

2.6 两个$\binom{2}{0}$型张量的线性组合是用它们在任意两个一次形式 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 上的值来定义的：$(\alpha\mathbf{h} + \beta\mathbf{r})(\tilde{p}, \tilde{q}) = \alpha\mathbf{h}(\tilde{p}, \tilde{q}) + \beta\mathbf{r}(\tilde{p}, \tilde{q})$. 这仍是 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的一个线性函数，因此是一个$\binom{2}{0}$型张量. 零张量在任意 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 上的值为零，而其他的一些公理也是显然的. 此时空间为 n^2 维，因为每一个张量 $\mathbf{h}$ 都由其 n^2 个分量 $\mathbf{h}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j) = h^{ij}$ 完全确定. n^2 个张量 $\{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j\}$ 是一个基，因为它们是线性无关的：线性组合 $\beta^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ 为零，当且仅当所有的 β^{ij}

为零．只要把该张量作用在基一次形式的所有偶上，就很容易看出这一点．事实上，容易证明 $\mathbf{h}=h^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$．

2.7　6，6．

2.8　线性性：$\mathbf{C}(a\vec{V}+b\vec{W})=\mathbf{B}(\mathbf{A}(a\vec{V}+b\vec{W}))=\mathbf{B}(a\mathbf{A}(\vec{V})+b\mathbf{A}(\vec{W}))$，$a\mathbf{B}(\mathbf{A}(\vec{V}))+b\mathbf{B}(\mathbf{A}(\vec{W}))=a\mathbf{C}(\vec{V})+b\mathbf{C}(\vec{W})$．

分量：若 $\mathbf{A}(\vec{e}_j)=A^k_j\vec{e}_k$，则 $\mathbf{C}(\vec{e}_j)=\mathbf{B}(A^k_j\vec{e}_k)=\mathbf{B}(\vec{e}_k)A^k_j=B^i_kA^k_j\vec{e}_i$．由此可推得结果．

每一个$\binom{1}{1}$型张量是 T_P 的一个线性变换．我们的结果表明：在合成运算（即由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 产生 $\mathbf{C}$）下，线性变换构成群．

2.9　$\mathbf{T}(\tilde{\omega}^{i'},\tilde{\omega}^{j'})=\mathbf{T}(\Lambda^{i'}_k\tilde{\omega}^k,\Lambda^{j'}_l\tilde{\omega}^l)=\Lambda^{i'}_k\Lambda^{j'}_l\mathbf{T}(\tilde{\omega}^k,\tilde{\omega}^l)$，这可推广为 $T^{i'\cdots j'}_{k'\cdots l'}=\Lambda^{i'}_{i}\cdots\Lambda^{j'}_{j}\Lambda^{k}_{k'}\cdots\Lambda^{l}_{l'}T^{i\cdots j}_{k\cdots l}$，这里 $(i'\cdots j')$ 是 N 个指标，而 $(k'\cdots l')$ 是 N' 个指标．

2.10　这对任意向量空间都是对的，零元素是唯一的．

2.11　此张量（在原有基中）在一个一次形式 $\tilde{p}$ 和一个向量 $\vec{V}$ 上的值是 $A^i_jV^jp_i$．在新基中，它是 $A^{i'}_{j'}V^{j'}p_{i'}=(\Lambda^{i'}_{l}\Lambda^{m}_{j'}A^{l}_{m})(\Lambda^{j'}_{k}V^k)(\Lambda^{n}_{i'}p_n)$，这里我们用到了每个成分的被变换后的分量．先对 i' 和 j' 求和，再应用(2.34)式能得出：新的值与原来的值一样，即该法则给出了一个与给定向量和一次形式相关联的实数，而这与基的选取无关．

2.12　(a)　$\Lambda=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$的正则形式是$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$．

(b)　$\Lambda=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$的正则形式是$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$．

(c)　$\Lambda=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$的正则形式是$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$．

2.13　(a)　变换法则可以从(2.55)式推出．作为一次形式的一个函数，$\mathrm{g}|^{-1}(\tilde{p},\tilde{q})=\mathrm{g}|(\bar{p},\bar{q})$给出(2.55)式，且明显地表明了线性性质．

(b)　在这种基下，该度规具有分量 $\pm\delta_{ij}$，因此 $\mathrm{g}|^{-1}$ 也有分量 $\pm\delta^{ij}$，这正好是逆矩阵．

2.14　在 P 点附近，把 g_{ij} 和 Λ^i_j 按泰勒级数展开．对于 g_{ij} 展开中的任意系数，适当地选取 Λ^i_j 展开式的系数，以满足(i)和(ii)．通过计算

系数的个数来证明(i)～(iii)成立。记住，并不是所有的$\partial \Lambda^{i}_{j'}/\partial x^{k'}$在$P$点都是独立的，因为$\Lambda^{i}_{j'}=\partial x^{i}/\partial x^{j'}$意味着$\partial \Lambda^{i}_{j'}/\partial x^{k'}=\partial \Lambda^{i}_{k'}/\partial x^{j'}$。

2.15 (a) $g_{rr}=1$, $g_{r\theta}=0$, $g_{\theta\theta}=r^2$。

(b) 正交归一的．$\hat{\mathbf{r}}=\partial/\partial r$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}=r^{-1}\partial/\partial\theta$.

2.16 (a) $\tilde{\mathrm{d}}f$具有分量$(\partial f/\partial r,\ \partial f/\partial\theta)$；$\overline{\mathrm{d}}f$具有分量$(\partial f/\partial r,\ r^{-2}\partial f/\partial\theta)$。

(b) 在正交归一基下，$\tilde{\mathrm{d}}f$和$\overline{\mathrm{d}}f$都有分量$(\partial f/\partial r,\ r^{-1}\partial f/\partial\theta)$。

第三章

3.1 (a) 对于函数，(3.3)式表明(3.8)式的每一边都简化为算子$[\bar{V},\ \bar{W}]$．对于向量场$\bar{U}$，(3.6)式给出(3.8)式的左边为$[\bar{V},\ [\bar{W},\ \bar{U}]]-[\bar{W},\ [\bar{V},\ \bar{U}]]$，(3.8)式的右边为$[[\bar{V},\ \bar{W}],\ \bar{U}]$．雅可比恒等式(习题2.3)与李括号的斜对称性确定了这个结果．

(b) 对于函数，我们再一次用雅可比恒等式(2.14)．对于向量，(3.8)式把(3.9)式转变为关于$[[\bar{X},\ \bar{Y}],\bar{Z}]+[[\bar{Y},\ \bar{Z}],\bar{X}]+[[\bar{Z},\ \bar{X}],\bar{Y}](=0)$的李导数。

3.2 (b) $\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}=\mathscr{L}_{\bar{V}}(U^i\bar{e}_i)=(\mathscr{L}_{\bar{V}}U^i)\bar{e}_i+U^i\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{e}_i=[V^j\bar{e}_j(U^i)]\bar{e}_i$

$$-U^i\mathscr{L}_{\bar{e}_i}(V^j\bar{e}_j)=[V^j\bar{e}_j(U^i)-U^j\bar{e}_jV^i]\bar{e}_i$$
$$-U^kV^j\mathscr{L}_{\bar{e}_k}\bar{e}_j.$$

求出最后一步，需要把指标重新编号。在最后一项中应用(3.7)式就能给出所求的结果。

3.3 以$V^i=\delta^i_1$，即能从(2.7)式推得。

3.4 从(3.3)式，有

$$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_iW^i=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\omega_iW^i)-\omega_i\left(V^j\frac{\partial}{\partial x^j}W^i-W^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i\right)$$
$$=\left(V^j\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i+\omega_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j\right)W^i,$$

其中第二项中的指标已重新编号．从W^i的任意性，可给出所求的结果。

3.5 (a) $[\sum_a\alpha_{(a)}\bar{A}_{(a)},\ \sum_b\beta_{(b)}\bar{A}_{(b)}]=\sum_{a,b}[\alpha_{(a)}\bar{A}_{(a)},\ \beta_{(b)}\bar{A}_{(b)}]$

$$=\sum_{a,b}\{\alpha_{(a)}\beta_{(b)}[\bar{A}_{(a)},\ \bar{A}_{(b)}]+\alpha_{(a)}[\bar{A}_{(a)}(\beta_{(b)})]\bar{A}_{(b)}$$
$$-\beta_{(b)}[\bar{A}_{(b)}(\alpha_{(a)})]\bar{A}_{(a)}\}.$$

3.6 $$(\mathscr{L}_{\bar{V}}\mathbf{T})^{i\cdots j}_{k\cdots l}=V^r\frac{\partial}{\partial x^r}T^{i\cdots j}_{k\cdots l}-T^{r\cdots j}_{k\cdots l}\frac{\partial}{\partial x^r}V^i-\cdots-T^{i\cdots r}_{k\cdots l}\frac{\partial}{\partial x^r}V^j$$
$$+T^{i\cdots j}_{r\cdots l}\frac{\partial}{\partial x^k}V^r+\cdots+T^{i\cdots j}_{k\cdots r}\frac{\partial}{\partial x^l}V^r.$$

命 $V^i=\delta^i_1$，从而有 $(\mathscr{L}_{\bar{V}}\mathbf{T})^{i\cdots j}_{k\cdots l}=\partial T^{i\cdots j}_{k\cdots l}/\partial x^1$.

3.7 $$[L^2,\mathscr{L}_{\bar{l}_z}]=\mathscr{L}_{\bar{l}_x}[\mathscr{L}_{\bar{l}_x},\mathscr{L}_{\bar{l}_z}]+[\mathscr{L}_{\bar{l}_x},\mathscr{L}_{\bar{l}_z}]\mathscr{L}_{\bar{l}_x}+\mathscr{L}_{\bar{l}_y}[\mathscr{L}_{\bar{l}_y},\mathscr{L}_{\bar{l}_z}]$$
$$+[\mathscr{L}_{\bar{l}_y},\mathscr{L}_{\bar{l}_z}]\mathscr{L}_{\bar{l}_y}=\mathscr{L}_{\bar{l}_x}\mathscr{L}_{\bar{l}_y}+\mathscr{L}_{\bar{l}_y}\mathscr{L}_{\bar{l}_x}-\mathscr{L}_{\bar{l}_y}\mathscr{L}_{\bar{l}_x}-\mathscr{L}_{\bar{l}_x}\mathscr{L}_{\bar{l}_y}=0.$$

其中第二步用到了(3.8)式．为了证明(3.33)式，要导出下列关系：$\bar{l}_x=-\sin\phi\,\partial/\partial\theta-\cos\phi\cot\theta\,\partial/\partial\phi$；$\bar{l}_y=-\cos\phi\,\partial/\partial\theta+\sin\phi\cot\theta\,\partial/\partial\phi$；$\bar{l}_z=\partial/\partial\phi$.

3.8 如果 a 是常数，那么从 $\mathscr{L}_{a\bar{V}}=a\mathscr{L}_{\bar{V}}$ 容易推得．(如果 a 是一般函数的话，那么这一点是不成立的．)

3.9 当从 $\phi=0$ 开始沿 ϕ 李拉曳时，$\bar{e}_z$ 保持不变，而 $\bar{e}_x$ 变为 $\bar{e}_r=\cos\phi\,\bar{e}_x+\sin\phi\,\bar{e}_y$. 第三个基向量 $\bar{e}_\phi$ 有笛卡儿表达式：$-\sin\phi\,\bar{e}_x+\cos\phi\,\bar{e}_y$. 三个向量谐函数是 $\exp(2i\phi)\,\bar{e}_z$，$\exp(2i\phi)(\cos\phi\,\bar{e}_x+\sin\phi\,\bar{e}_y)$，$\exp(2i\phi)(-\sin\phi\,\bar{e}_x+\cos\phi\,\bar{e}_y)$．使用更紧凑的线性组合 $\exp(2i\phi)\bar{e}_z$，$\exp(i\phi)(\bar{e}_x+i\bar{e}_y)$，$\exp(3i\phi)(\bar{e}_x-i\bar{e}_y)$ 可能更有用．从这些，显然可知 $\bar{e}_x+i\bar{e}_y$ 的本征值为 $+1$，而 $\bar{e}_x-i\bar{e}_y$ 的本征值为 -1．这些很容易直接验证．一次形式 $\tilde{d}z$ 在李拉曳下不变，而 $\tilde{d}x$ 变成 $\tilde{d}r=\cos\phi\,\tilde{d}x+\sin\phi\,\tilde{d}y$．第三个基一次形式 $\tilde{d}\phi$ 有笛卡儿表达式：$-\sin\phi\,\tilde{d}x+\cos\phi\,\tilde{d}y$．于是，三个一次形式谐函数是 $\exp(2i\phi)\tilde{d}z$，$\exp(i\phi)(\tilde{d}x+i\tilde{d}y)$，$\exp(3i\phi)(\tilde{d}x-i\tilde{d}y)$．由于 $\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}f=2if$，$\tilde{d}(\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}f)=2i\tilde{d}f$．容易证明(应用柱坐标)，$\tilde{d}(\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}f)=\mathscr{L}_{\bar{e}_\phi}(\tilde{d}f)$，这就完成了证明．这是下面 4.21 节中证明的一个一般定理的一个特殊情况．

3.10 右不变向量场在映射 R_g(类似于 L_g，它由右平移生成)下不变．图 3.10 在这里也能适用，因此它们构成一个李代数．右不变向量场过 e 的积分曲线(与左不变积分曲线有相同的原因)是单参数子群．但是这些子群与这两组积分曲线有 1-1 的对应，因此这些曲线是同样的．一个左不变场的那些不通过 e 的积分曲线可以由那些通过 e 的积分曲线(即单参数子群)用左平移得到．$\bar{V}$ 的通过(例如说) h 的左不变曲线是 $hg_{\bar{V}_e}(t)$．通过 h 的右不变曲线是 $g_{\bar{V}_e}(t)h$．两者是不同的，除非 h 和 $g_{\bar{V}_e}(t)$ 可交换．

3.11 (a) 因为由 h^{-1} 给出的左平移是把 h 的邻域映为 e 的邻域的一个 1-1 映射，所以向量场映射 L_h 也是 1-1 的和可逆的．由此得到，若

$\{\bar{V}_i(e)\}$是线性无关的，则对于任意 h，$\{L_h\bar{V}_i(e)\equiv\bar{V}_i(h)\}$也是线性无关的。

(b) 要点是，场 $\{\bar{V}_i\}$ 是一个整体上的基，因此任意向量场，由对所有的 g 给出的 $\{a_i(g)\}$ 所定义；这把 TG 映射到 $G\times R^n$ 上。

3.12 (b) 关键的一步是 $(B^{-1}AB)^n=B^{-1}ABB^{-1}AB\cdots B^{-1}AB=B^{-1}A^nB$。

(c) 分块对角矩阵是容易求其指数矩阵的，这是因为

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} (P_1)^n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & (P_2)^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & (P_3)^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

在情况(i)中 $\exp(t\lambda_j)$是通常的指数函数．在情况(ii)中，

$$\begin{aligned}
&\exp\left[t\begin{pmatrix} r_j & s_j \\ -s_j & r_j \end{pmatrix}\right]\\
&=\exp\left[t\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_j+is_j & 0 \\ 0 & r_j-is_j \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\exp\left[t\begin{pmatrix} r_j+is_j & 0 \\ 0 & r_j-is_j \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\exp(tr_j)\begin{pmatrix} \cos tr_j+i\sin tr_j & 0 \\ 0 & \cos tr_j-i\sin tr_j \end{pmatrix}\\
&\quad\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

由此可得到结果．对于(iii)，经过一些试验，可验证下列结果：

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & x & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^n
=\begin{pmatrix} x^n & \frac{d}{dx}x^n & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}x^n & \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}x^n & \cdots \\ 0 & x^n & \frac{d}{dx}x^n & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}x^n & \cdots \\ 0 & 0 & x^n & \frac{d}{dx}x^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

当乘以 t^n，并置于指数的求和式之中，这就给出(3.59c)式。

3.13 矩阵的序列

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin(t/2) \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

是一条连续曲线，它包含 e($t=0$ 时)和

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

($t=\pi$ 时)。这一矩阵不在一个单参数子群中，这是因为任意矩阵的指数都不等于它。这可由习题3.12证得。容易证明：(3.59)式中的一些形式都不能按(3.56)式变换到所需的矩阵，这是因为在主对角线上出现了负元素。

3.14 (a) A 的本征值 λ 满足方程 $\det(A-\lambda I)=0=\det(A-\lambda I)^{\mathrm{T}}=\det(A^{\mathrm{T}}-\lambda I)=\det(A^{-1}-\lambda I)$，因此 λ 也是 A^{-1} 的一个本征值。反过来也对。

(b) $\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow 0=\det(A^{-1})\det(A-\lambda I)=\det(I-\lambda A^{-1})$

$$=\det(-\lambda I)\det(A^{-1}-\lambda^{-1}I).$$

因为 $\det(A)\neq 0$，所以 A 的本征值都不为零，由此我们得到 $\det(A^{-1}-\lambda^{-1}I)=0$ 的结论。因此，如果 A 在 $O(n)$ 中，且 λ 是 A 的一个本征值，那么 $1/\lambda$ 也是一个本征值。但是方程 $\det(A-\lambda I)=0$ 是实的，因此它的解以复共轭对的形式出现。为了使这些对是可逆的，它们必须具有($e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$)的形式。

(c) 对于给定的本征值，这些形式正好是(3.58a, b)式，而(3.62b)式是(3.62c)式的一个特殊情况。需要排除的仅有的情况是 $\mu_3=\pm1$ 时的(3.58c)式。这一形式是不可能的，这是因为 $B^{-1}AB$ 在 $O(n)$ 之中，而容易看出，(3.58c)式不在 $O(n)$ 之中。

(d) 考察任何元素，特别是 e 的切空间可以求得李代数。因此我们只要求 $SO(n)$ 的一维单参数子群的生成元。通过考察标准型可以解决这一问题，但是下列方法更快。考虑元素 $\exp(tA)$，其中 A 是 $O(n)$ 的李代数中的元。于是 $[\exp(tA)]^{-1}=\exp(-tA)$ 和 $[\exp(tA)]^{\mathrm{T}}=\exp(tA^{\mathrm{T}})$，对于任意 t，它们都是相等的，因此 $A^{\mathrm{T}}=-A$。可以同样证明，其逆也真。$O(n)$ 的维数是 $n\times n$ 斜对称矩阵中线性无关的最大个数，即 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

3.15 矩阵 A 属于 $SO(n)$ 的充要条件是其标准型(3.62)式有偶数个 (-1) 分块. $O(n)$ 的一个元素,若不在 $SO(n)$ 之中,则有奇数个 (-1) 分块,而且它显然能由 $SO(n)$ 中的一个元素通过给定的那个变换得到.

3.16 正如上题中一样, $SO(n)$ 中元素 A 的标准型有偶数个 (-1) 分块,把它们排列起来可以成为(3.62c)式在 $\theta=\pi$ 时的一个特殊情况. 不管是标准型(3.62a)式还是(3.62c)式,它们都是指数(3.59a)式或(3.59b)式的一个特殊形式. 对于 $SO(3)$,此时的标准型必定是(3.62a)式的一个分块和(3.62c)式的另一个分块. (3.62a)式的本征向量是转动的轴.

3.17 应用(3.60)式.

3.18 矩阵 $\mathrm{diag}[\exp(ia_1t), \exp(ia_2t), \cdots]$ 是 $\mathrm{diag}(ia_1t, ia_2t, \cdots)$ 的指数. 第一个矩阵行列式为 $\exp(it\sum_j a_j)$,而且若它等于 1,则第二个矩阵就是迹为零的. 现在让我们在复数与实 2×2 矩阵之间建立一个对应: $a+ib\leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. 这个对应是保持乘法的 $(a+ib)(c+id)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$. 因此在复数与这种特殊形式的矩阵之间就有一个群同构. (事实上,这是一个代数同构,因为它也保持加法). 这个同构可推广到 $GL(n, \mathrm{C})$ 与由具有 2×2 分块形式 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 的矩阵构成的 $GL(2n, \mathrm{R})$ 的子群之间的群同构. $GL(n, \mathrm{C})$ 中厄密共轭在 $GL(2n, \mathrm{R})$ 中就是转置运算. 由此我们可以把 $U(n)$ 看成是 $O(2n)$ 的一个子群. 因为 $O(2n)$ 是由 $2n\times2n$ 的斜对称矩阵生成的, $U(n)$ 就由反厄密矩阵所生成. 根据我们最初注意到的那一点,以及习题 3.20(a),它们必定是迹为零的.

3.20 (a) $(B^{-1}AB)^i_k=(B^{-1})^i_l A^l_m B^m_k$. 但是 $(B^{-1})^i_l B^m_i=\delta^m_l$, 因此 $\mathrm{tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{tr}(A)$.

(b) 因为 $\det(B^{-1})=1/\det(B)$, 我们有 $\det(\exp(A))=\det(B^{-1}\exp(A)B)=\det(\exp(B^{-1}AB))$; 而且 $\exp(\mathrm{tr}(A))=\exp(B^{-1}(\mathrm{tr}A)B)=\exp(\mathrm{tr}(B^{-1}AB))$. 这样,我们只要对各种标准型来证明(3.67)式. 对(3.58a)式,这是平凡的. 对于(3.58b)式,注意到(3.59b)式,就能证得结果了. 对(3.58c)式也同样是对的,因为(3.59c)中的矩阵的行列式为 1.

3.21 (a) 应用恒等式 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.

3.22 (a) 注意到$\det\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}=|a|^2+|b|^2$，所以只有零矩阵的行列式才为零.

(b) 维数是4，因为定义H的一个元素可以自由地选取4个实数.

(d) (3.73)式是S^3的方程式，因此把R^4中S^3的每一点$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$与矩阵$A$对应，便能构造这个1-1映射.

3.23 因为$[g(s)]^{-1}=\exp(-s\bar{Y})$，我们就能把(3.79)式写为

$$\exp(s\bar{Y})\exp(t\bar{X})\exp(-s\bar{Y})=\exp[tAd_{g(s)}(\bar{X})].$$

两边关于t在$t=0$处求导，就有

$$\exp(s\bar{Y})\bar{X}\exp(-s\bar{Y})=Ad_{g(s)}(\bar{X}).$$

把左边按s的幂展开，就有

$$\bar{X}+s[\bar{Y}, \bar{X}]+\frac{1}{2}s^2[\bar{Y}, [\bar{Y}, \bar{X}]]+\frac{1}{3}s^3[\bar{Y}, [\bar{Y}, [\bar{Y}, \bar{X}]]]+\cdots,$$

这就证明了结果.

3.24 (b) $l_x(Y_{1\,-1})=\mathrm{i}Y_{1\,0}/\sqrt{2}$; $l_y(Y_{1\,-1})=Y_{1\,0}/\sqrt{2}$;

$$l_z(Y_{1\,-1})=\mathrm{i}Y_{1\,-1};$$

$$l_x(Y_{1\,0})=\mathrm{i}(Y_{1\,-1}-Y_{1\,1})/\sqrt{2};$$

$$l_y(Y_{1\,0})=-(Y_{1\,-1}+Y_{1\,1})/\sqrt{2};$$

$$l_z(Y_{1\,0})=0;\ l_x(Y_{1\,1})=-\mathrm{i}Y_{1\,0}/\sqrt{2};$$

$$l_y(Y_{1\,1})=Y_{1\,0}/\sqrt{2};\ l_z(Y_{1\,1})=\mathrm{i}Y_{1\,1}.$$

因此这3个函数的任意复线性组合，将通过沿l_x，l_y或l_z的导数变为另一个.

3.25 (3.30)式的第一式意味着$l_z(f)=0$. 剩下的两个意味着$l_x(f)=l_y(f)=0$. 这样f在球面上必为常数.

3.26 $A^k_x=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$;

$$A^k_y=\frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_k^j = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; X_k^j = L_1.$$

第四章

4.1 $\mathbf{B}(\overline{U}+\overline{W}, \overline{U}+\overline{W})=0=\mathbf{B}(\overline{U}, \overline{U})+\mathbf{B}(\overline{U}, \overline{W})+\mathbf{B}(\overline{W}, \overline{U})$
$+\mathbf{B}(\overline{W}, \overline{W})=\mathbf{B}(\overline{U}, \overline{W})+\mathbf{B}(\overline{W}, \overline{U})$.

4.2 (a) $\tilde{p}(\cdots, \overline{U}, \cdots, \overline{W}, \cdots)=p_{\cdots i\cdots j\cdots}U^iW^j=-p_{\cdots j\cdots i\cdots}U^iW^j$
$=-\tilde{p}(\cdots, \overline{W}, \cdots, \overline{U}, \cdots)$.

(b) 由 $A_{ijk}=-A_{jik}=A_{kij}$ 等推得.

(c) $A_{ij}B^{ij}=\frac{1}{2}A_{ij}B^{ij}+\frac{1}{2}A_{ji}B^{ji}=\frac{1}{2}(A_{ij}B^{ij}-A_{ij}B^{ji})=A_{ij}B^{[ij]}$. 第一步只需要把哑指标重新编号.

(d) $B^{(ij)}=\frac{1}{2}[\mathbf{B}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j)-\mathbf{B}(\tilde{\omega}^j, \tilde{\omega}^i)]=0$.

4.3 $\tilde{\omega}$ 的分量是它在一组 p 个基向量上的值. 若 $p>n$, 则至少有两个向量是一样的. 交换这两个向量不会有任何改变, 但同时却改变了该分量的符号. 能与其负值相等的数只有零.

4.4 我们只要证明两个 p 次形式的和是一个 p 次形式, 即它是完全斜对称的, 以及一个 p 次形式与一个数的乘积仍是一个 p 次形式. 这个空间的维数是一个 p 次形式所可能有的独立分量的个数, 由(4.7)式可知这是 C_p^n.

4.5 $\tilde{p}\wedge\tilde{q}(\overline{U}, \overline{V})=\tilde{p}(\overline{U})\tilde{q}(\overline{V})-\tilde{q}(\overline{U})\tilde{p}(\overline{V})=-\tilde{p}\wedge\tilde{q}(\overline{V}, \overline{U})$. 显然, 对于任意 $\overline{U}, \overline{V}$, 有 $\tilde{p}\wedge\tilde{p}(\overline{U}, \overline{V})=0$.

4.6 检验(4.9)式 $\tilde{\alpha}(\overline{U}, \overline{V})=\frac{1}{2}\alpha_{ij}[\tilde{\omega}^i(\overline{U})\tilde{\omega}^j(\overline{V})-\tilde{\omega}^j(\overline{U})\tilde{\omega}^i(\overline{V})]=\frac{1}{2}\alpha_{ij}(U^iV^j-V^iU^j)=\frac{1}{2}\alpha_{ij}U^iV^j+\frac{1}{2}\alpha_{ji}V^iU^j=\alpha_{ij}U^iV^j$. 独立的二次形式 $\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k$ 的个数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$, 这是二次形式空间的维数.

4.7 根据二项式定理, $(1+1)^n=\sum_{p=0}^n C_p^n$. 注意, 这包括 $p=0$, 即零次形式的一维空间.

4.8 由(4.9)式及其推广, 我们知道, $\tilde{q}=(1/2!)\times q_{jk}\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k$ 及 $\tilde{p}\wedge\tilde{q}$

$=(1/3!)(\tilde{p}\wedge\tilde{q})_{ijk}\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k$. 但是 $\tilde{p}\wedge\tilde{q}=(1/2!)p_iq_{jk}\tilde{\omega}^i\wedge(\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k)=(1/2!)p_iq_{jk}\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k=(1/2!)\times p_{[i}q_{jk]}\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k$. 因为 $\{\tilde{\omega}^i\wedge\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k\}$ 构成一个基,所以有结论: $(\tilde{p}\wedge\tilde{q})_{ijk}=(3!/2!)p_{[i}q_{jk]}=\frac{1}{2}(p_iq_{jk}+p_kq_{ij}+p_jq_{ki}-p_iq_{kj}-p_kq_{ji}-p_jq_{ik})=p_iq_{jk}+p_kq_{ij}+p_jq_{ki}$. 推广到(4.11)式是直接的. 我们提醒读者, $C_p^{p+q}=C_q^{p+q}$, 因此(4.11)式是平等对待 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的.

4.9 (4.16)式对 $\tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\alpha}$ 是双线性的, 因此对 $\tilde{\beta}=\tilde{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^p$ 和 $\tilde{\alpha}=\tilde{\omega}^{p+1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^{p+q}$ 这一情况进行证明便足够了. 于是 $\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha}(\vec{\xi})=(\tilde{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^p\wedge\tilde{\omega}^{p+1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^{p+q})(\vec{\xi})$. 这一楔积具有 $(p+q)!$ 个项, 这是指标所有可能的置换个数. 以 $\tilde{\omega}^1$ 开始的项与 $\vec{\xi}$ 缩并给出 $\tilde{\omega}^1(\vec{\xi})(\tilde{\omega}^2\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^p\wedge\tilde{\omega}^{p+1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^{p+q})$. 以 $\tilde{\omega}^2$ 开始的项是以 $\tilde{\omega}^1$ 开始的项, 通过交换 $\tilde{\omega}^1$ 和 $\tilde{\omega}^2$ 得到的, 而且差一个奇次置换. 所以这些项与 $\vec{\xi}$ 的缩并给出 $-\tilde{\omega}^2(\vec{\xi})(\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}_3\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^p\wedge\tilde{\omega}^{p+1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^{p+q})$. 类似地有缩并 $\tilde{\omega}^3(\vec{\xi})(\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^2\wedge\tilde{\omega}^4\wedge\cdots)$ 及其他等等. 现在最初的 p 个这种缩并正好是 $\tilde{\beta}(\vec{\xi})\wedge\tilde{\alpha}$, 因为它们只包含 $\tilde{\beta}$ 中的那些一次形式. 剩下的 q 个缩并是 $\vec{\xi}$ 和 $\tilde{\alpha}$ 中的一次形式的缩并, 而 $\tilde{\beta}$ 在楔积的前面, 当然其前还有由 $\tilde{\beta}$ 的次数所决定的它们的总体符号. 也即第一个这种项是 $(-1)^p\tilde{\omega}^{p+1}(\vec{\xi})(\tilde{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^p\wedge\tilde{\omega}^{p+2}\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}^{p+q})$, 而所有其他项也都是出现在 $\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha}(\vec{\xi})$ 中项的 $(-1)^p$ 倍.

4.10 在笛卡儿坐标中, $\vec{W}=\vec{U}\times\vec{V}$ 具有分量 $(U^2V^3-U^3V^2, U^3V^1-U^1V^3, U^1V^2-U^2V^1)$. 在(4.20)式中, 命 $\omega_{123}=1$, 就有 $^*(\vec{U}\times\vec{V})_{12}=(U\times V)^3$ 等等. 这证明了(4.22)式.

4.11 (a) (4.35)式下面的式子的右边就是 $(p+1)!$ 个项的一个和式. 以下标 i 开始的项总共有 $p!$ 个, 以下标 m 开始的项也有 $p!$ 个, 它们(附有正确的符号)出现在第二项中, ………. (4.36)式上面的最后一项对 i 进行了求和 $(\delta^i_i=n)$.

(b) 对 n 次 δ 函数使用(4.36)式 $(n-p)$ 次以给出 p 次 δ 函数, 这样就得到因子 $1\cdot2\cdots(n-p)$, 这与(4.37)式中的 $(n-p)!$ 一致.

4.12 (a) 要注意的要点是 $\varepsilon_{ij\cdots k}A^{1i}A^{2j}\cdots A^{nk}=A^{11}\times(\varepsilon_{1j\cdots k}A^{2j}\cdots A^{nk})+A^{12}(\varepsilon_{2j\cdots k}A^{2j}\cdots A^{nk})+\cdots=A^{11}(\varepsilon_{\alpha\cdots\beta}\times A^{2\alpha}\cdots A^{n\beta})-A^{12}(\varepsilon_{\alpha\cdots\beta}A^{2\alpha}\cdots A^{n\beta})+-\cdots$, 这里在最后一个表达式中的每一和式里, 希腊指标只取 $(n-1)$ 个值: 在第一个和式中避开 1, 在第二个和式中避开 2, 等等. 根据(4.39)式, 第 p 个括号项是由原来的矩阵去掉第 1 行和第 p 列得到的 $(n-1)\times(n-$

1)矩阵的行列式.

(b) 若2与1交换,(4.39)式显然是斜对称的，这就推出了所要求的结果.

4.13 设矩阵 $\Lambda^i_{j'}$ 按基一次形式变换,即 $\tilde\omega^i=\Lambda^i_{j'}\tilde{d}x^{j'}$. 于是 $\tilde\omega=\Lambda^1_{j'}\cdots\Lambda^n_{k'}\tilde{d}x^{j'}\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^{k'}=\Lambda^1_{j'}\cdots\Lambda^n_{k'}\varepsilon^{j'\cdots k'}\tilde{d}x^{1'}\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^{n'}=\det(\Lambda)\tilde{d}x^{1'}\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^{n'}$. 但是度规的分量按 $g_{i'j'}=\Lambda^k_{i'}\Lambda^l_{j'}g_{kl}$ 变换，这作为一个矩阵等式具有行列式 $\det(g_{i'j'})=[\det(\Lambda)]^2\det(g_{ij})$. (注意，根据习题4.12(b)，矩阵转置后的行列式等于原矩阵的行列式.) 而且原基是正交归一的，因此 $\det(g_{ij})=\pm1$. 由此得到 $\det(\Lambda)=|\det(g_{i'j'})|^{1/2}$. 结果获证.

4.14 (a) 这是性质(2)在 $\tilde\alpha$ 是零次形式 f 时的特殊情况，利用性质(3)消去 $\tilde{d}\tilde{d}g$.

(b) 这是显然的.

4.15 $V^{i'}{}_{;k'}=\Lambda^j_{k'}(\Lambda^{i'}_l V^l)_{,j}=\Lambda^j_{k'}\Lambda^{i'}_l V^l{}_{,j}+\Lambda^j_{k'}\Lambda^{i'}_{l,j}V^l$，第二项的出现是不符合张量变换法则的. 现在，在 $[\bar U,\bar V]^{k'}$ 中出现的两个"多余"的项是 $U^jV^l\Lambda^{k'}_{l,j}-V^jU^l\Lambda^{k'}_{l,j}$. 因为 $\Lambda^{k'}_{l,j}=\Lambda^{k'}_{j,l}=\partial^2x^{k'}/\partial x^j\partial x^l$,所以它们为零.

4.16 $\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\,f)={}^*\tilde{d}(\tilde{d}f)={}^*(\tilde{d}\tilde{d}f)=0$.

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\tilde{a})=\tilde{d}{}^*({}^*\tilde{d}\tilde{a})=\tilde{d}({}^{**}\tilde{d}\tilde{a})=\tilde{d}\tilde{d}\tilde{a}=0.$$

4.17 (4.64)式中的第一个表达式是 $\tilde{d}\tilde\alpha=0$ 的分量形式. 第二步与习题4.11(a)中的那一步一样. (4.64)式中右边的第二项是由第一项简单地通过交换 j 和 l 而得到的，这就引起一个符号改变，而且表明它们是相等的.

4.18 $\mathrm{div}(\tilde{a})=\tilde{d}{}^*\tilde{a}=0\Rightarrow{}^*\tilde{a}=\tilde{d}\tilde{b}$ 对于某个 $\tilde{b}\Rightarrow\tilde{a}={}^*\tilde{d}\tilde{b}=\mathrm{curl}(\tilde{b})$.

$$\mathrm{curl}(\tilde{a})={}^*\tilde{d}\tilde{a}=0\Rightarrow\tilde{d}\tilde{a}=0\Rightarrow\tilde{a}=\tilde{d}f=\mathrm{grad}(f).$$

4.19 选取一个向量基 $(\bar e_1,\bar e_2,\cdots,\bar e_n)$，使得 $(\bar e_2,\cdots,\bar e_n)$ 与 ∂U 相切: $\tilde n(\bar e_p)=0$, $2\leqslant p\leqslant n$. 这意味着 $\tilde n(\bar e_1)\neq0$，这是因为 $\tilde n$ 必须至少有一个非零分量. 由于 $\tilde\omega$ 是一个 n 次形式，它只有一个独立的分量，即 $\tilde\omega(\bar e_1,\bar e_2,\cdots,\bar e_n)=(\tilde n\wedge\tilde\alpha)(\bar e_1,\bar e_2,\cdots,\bar e_n)$. 其中仅有的非零项是当 $\tilde n$ 与 $\bar e_1$ 缩并时产生的，因此我们有 $\tilde n(\bar e_1)\tilde\alpha(\bar e_2,\cdots,\bar e_n)$. 但是 $\tilde\alpha(\bar e_2,\cdots,\bar e_n)$ 是 $\tilde\alpha|_{\partial U}$ 在这一基下的唯一独立分量,所以可求得为 $\tilde\omega(\bar e_1,\cdots,\bar e_n)/\tilde n(\bar e_1)$. 但是 $\tilde\alpha$ 本身却不是唯一的:对于任意函数 f, $\tilde\alpha+f\tilde n$ 也恰好能起到同样作用. 现在，对 $\tilde n$ 的唯一要求是它与 ∂U 垂直. 在我们的基下，这意味着 $\tilde n$ 具有分量$(n^1,$

0, ···, 0). 显然任意两个法线 $\tilde{n}$ 和 $\tilde{n}'$ 由下式所关联: $\tilde{n}=f\tilde{n}'$. 根据我们以前的结果, $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ 此时改变为 $f^{-1}\tilde{\alpha}|_{\partial U}$, 因此 $\tilde{n}(\vec{\xi})\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ 是不改变的.

4.20 按照从(4.76)式得出的一些步骤, 我们得到 $\tilde{d}[\tilde{\omega}(\vec{\xi})]=(f\xi^i)_{,i}\times\tilde{d}x^1\wedge\cdots\wedge\tilde{d}x^n=f^{-1}(f\xi^i)_{,i}\tilde{\omega}$.

4.21 应用习题 4.13, 证明在球极坐标中, 度规是 $\mathrm{diag}\,(1,\ r^2,\ r^2\sin^2\theta)$. 因此在(4.80)式中命 $f=r^2\sin\theta$ 就能得到 $\mathrm{div}\,\vec{\xi}$.

4.22 从(4.67)式, 有 $\pounds_{\vec{V}}(\rho\tilde{\omega})=\tilde{d}[\rho\tilde{\omega}(\vec{V})]=\tilde{d}[\tilde{\omega}(\rho\vec{V})]=\mathrm{div}(\rho\vec{V})\tilde{\omega}$.

4.23 (a) 由于 $\tilde{\omega}(\vec{\xi})={}^*\vec{\xi}$, (4.77)式的对偶立即给出(4.81)式.

(b) ${}^*\mathbf{F}$ 是一个 $(n-p)$ 次形式, $d^*\mathbf{F}$ 是一个 $(n-p+1)$ 次形式, 因此 ${}^*d^*\mathbf{F}$ 是一个 $(p-1)$ 次向量. 简单地推广(4.76)式即能证明(4.83)式.

(c) $(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\mathbf{F})^{i\cdots j}=f^{-1}(fF^{ki\cdots j})_{,k}$

4.24 (a) 若 $\tilde{\omega}=\tilde{d}\tilde{\alpha}$, 则 $\int\tilde{\omega}=\oint\tilde{\alpha}$; 但是因为此时没有边界, 所以第二个积分为零.

(b) $\tilde{d}\tilde{\omega}=\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3$ 是通常的体积形式, 因此如果 B 是单位球 (R^3 中 S^2 的内部), 则 $\int_B d\tilde{\omega}$ = 球的体积 $=4\pi/3$. 根据斯托克斯定理, $\int_B\tilde{d}\tilde{\omega}=\int_{S^2}\tilde{\omega}|_{S^2}$. 现在, 在一个二维流形中的任意二次形式都是闭的, 这是因为所有三次形式恒为零. 所以 $\tilde{\omega}$ 是闭的, 但是它不是恰当的, 否则与上述(a)矛盾.

(c) 给定的 $\tilde{\beta}$ 在 S^2 上处处有定义, 且 $\tilde{d}\tilde{\beta}=0$. 把 $\tilde{d}\tilde{\beta}$ 在 S^2 上由单独一条闭曲线 $\mathscr{C}$ 围成的任意区域上积分, 对于任意 $\mathscr{C}$, 有 $\oint_{\mathscr{C}}\tilde{\beta}=0$. 这仅当对于某 f 有 $\tilde{\beta}=\tilde{d}f$ 时才是对的: 否则能找到某一曲线 $\mathscr{C}$, 在其上 $\tilde{\beta}$ 会有一个非零的积分. 事实上, 可以如下构造 f: 在 P 点选取任意值 f_0, 并在 P 到任意点 Q 的任意一条曲线上积分 $\tilde{\beta}$, 定义 $f(Q)=f_0+\int\tilde{\beta}$. $\oint\tilde{\beta}=0$ 的这一条件保证了 $f(Q)$ 的定义与从 P 到 Q 的路径的选取无关.

4.25 (a) (i)和(ii)是浅显的. 对于(iii), 假定 $\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}=\tilde{d}\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\beta}-\tilde{\gamma}=\tilde{d}\tilde{\mu}_2$, 于是 $\tilde{\alpha}-\tilde{\gamma}=\tilde{d}(\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2)$.

(b) 首先证明: 若 $\tilde{\beta}_1\approx\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\beta}_2\approx\tilde{\alpha}_2$, 则对于任意实数 a, b, 有 $a\tilde{\beta}_1+$

$b\tilde{\beta}_2\approx a\tilde{\alpha}_1+b\tilde{\alpha}_2$. 这是浅显的，因为存在 $\tilde{\mu}_1$ 和 $\tilde{\mu}_2$，使得 $\tilde{\beta}_1=\tilde{\alpha}_1+\tilde{d}\tilde{\mu}_1$ 和 $\tilde{\beta}_2=\tilde{\alpha}_2+\tilde{d}\tilde{\mu}_2\Rightarrow a\tilde{\beta}_1+b\tilde{\beta}_2=a\tilde{\alpha}_1+b\tilde{\alpha}_2+\tilde{d}(a\tilde{\mu}_1+b\tilde{\mu}_2)$. 这样，我们就可以首尾一致地定义等价类 A_1 和 A_2 的线性组合 aA_1+bA_2，为它们的任意元素的同一线性组合所确定的等价类. 因此我们能把这些等价类本身看成是一个向量空间中的向量：零元是 Z^p 中零向量所确定的等价类，任意类 A 的逆元是 $-A$，等等.

(c) 取 R^2 中的向量 $(0, b)$. 它所确定的等价类是怎样的？它是所有具有形式 $(0, b)+(a, 0)$ 的向量，这里 a 是任意的，而 b 是固定的. 这些点的轨迹是一条直线，平行于 x 轴，且与元相距 b. 用这种方式，我们能把这种等价类的空间与这样的线汇同化.

4.26 此向量场在任意处都不能为零，因为该映射不固定任意点：固定点将对应于 T 的标准型中的一个 $(+1)$ 分块，但是 T 已是标准型，且没有这种分块. 注意，这里的球面的维数是奇数，这是关键的.

4.27 (a) 这是浅显的.

(b) $H^{n-1}(S^{n-1})$ 是一个一维向量空间 (R^1)，因此任意等价类是另一类的一个倍数. 因为 $\tilde{\omega}$ 不是恰当的，它就在一个非零等价类中. 由习题 4.25(b) 得出：每一个等价类都包含 $\tilde{\omega}$ 的一个倍数，因此对于任意 $\tilde{\alpha}$ 存在一个数，使得 $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}\approx 0$，即 $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}$ 是恰当的. 在 S^{n-1} 上积分就给出 a 的值.

(c) 若 $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}=\tilde{d}\tilde{\beta}$，则 $\tilde{\beta}$ 是一个 $(n-2)$ 次形式. 设它关于 $\tilde{\omega}$ 的对偶是 $\bar{V}$，即 $\bar{V}={}^*\tilde{\beta}$，或 $\tilde{\beta}=(-1)^{n*}\bar{V}$. 于是 $\tilde{d}\tilde{\beta}=(-1)^n(\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\tilde{\omega}$. 设 f 等于 $\tilde{\alpha}$ 的对偶，因此我们有 $(f-a)\tilde{\omega}=(-1)^n(\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\tilde{\omega}$. 这等价于所要证明的结果.

(d) 在这一情况中，在单位圆周上有 $\tilde{\omega}=x\tilde{d}y-y\tilde{d}x=\tilde{d}\theta$，这里 θ 是极角. 任意其他一次形式 $\tilde{\alpha}$ 可以写为 $g(\theta)\tilde{d}\theta$，因此我们希望找到 $f(\theta)$，使得 $\tilde{d}f=[g(\theta)-a]\tilde{d}\theta$ 处处成立. 因为 $\tilde{d}f=(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta)\tilde{d}\theta$，解得 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta=g(\theta)-a$，或 $f=\int g\,\mathrm{d}\theta-a\theta$. 为了使 f 是连续的，我们要求 $f(0)=f(2\pi)$，或 $2\pi a=\int_0^{2\pi}g\mathrm{d}\theta$. 这与我们在上面(b)中推得的是一致的. 把(b)中的推理倒过来，由此我们有结论：$H^1(S^1)=R^1$.

4.28 (a) 构造 f 象上面解答习题 4.24(c) 一样.

(b) 假定 M 是单连通的，且设 $\tilde{\alpha}$ 是 M 上足够光滑的任意一次形式场.

于是当闭曲线 $\mathscr{C}$ 收缩时，$\int_{\mathscr{C}}\tilde{\alpha}$ 就光滑地变化。但是总可以使 $\mathscr{C}$ 足够地小，使之完全在庞加莱引理(4.19 节)能适用的一个区域之中，在其中 $\int_{\mathscr{C}}\tilde{\alpha}=0$。根据连续性(即把这样的一些小曲线连接成一条大曲线)可以得出：对于任意闭曲线 $\mathscr{C}$，有 $\int_{\mathscr{C}}\tilde{\alpha}=0$。于是根据上述(a)，$H^1(M)=0$。其逆是类似的。若 $H^1(M)\neq 0$，则存在一个闭的一次形式 $\tilde{\alpha}$，它不是恰当的。根据上述(a)可得：至少对 M 中的某一闭曲线 $\mathscr{C}$，有 $\int_{\mathscr{C}}\tilde{\alpha}\neq 0$。如果这条曲线能光滑地形变为一点，那么对 $\mathscr{C}$ 的所有足够小的收缩 $\mathscr{C}'$，就有 $\int_{\mathscr{C}'}\tilde{\alpha}=0$。如上述那样，这将意味着 $\int_{\mathscr{C}}\tilde{\alpha}=0$，这就矛盾了。因此 $\mathscr{C}$ 不能收缩为一点。

4.29 $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$ 的所有线性组合，也只有这些线性组合才能被 $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \cdots, \tilde{\omega}^n\}$ 中的每一个一次形式所零化。因此这些一次形式的完全理想是与原形式的完全理想一样。设 $\tilde{\beta}$ 是一个 q 次形式，它零化 X_P 中的每一个向量，将 $\tilde{\beta}$ 在基一次形式中展开。$\tilde{\beta}$ 中的每一项都是 q 个基一次形式的楔积，并且每一项都至少必须包含 $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \cdots, \tilde{\omega}^n\}$ 中的一个。如果不是这样，那么那一项就不能零化 X_P 中的每一个向量。$\tilde{\beta}$ 的这种展开可以象习题中所示那样表出。

4.30 如习题 4.29 一样，把 $\tilde{\gamma}$ 在一个一次形式基 $\{\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\omega}^{m+1}, \cdots, \tilde{\omega}^n\}$ 中展开。若 $\tilde{\gamma}$ 在理想之中，则每一项就至少包含 $\{\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_m\}$ 中的一个，所以满足(4.90)式。相反地，若 $\tilde{\gamma}$ 是一个 q 次形式($q\leqslant n-m$)，且满足(4.90)式，则构造一组向量 $\{\bar{x}, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{m+q}\}$，其中 $\bar{x}$ 属于 $\tilde{\alpha}^j$ 的零化子 X_P。而且 $\bar{y}_j$ 不属于 X_P。设(4.90)式中的$(m+q)$次形式作用在这组向量上，当 $\bar{x}$ 是 $\tilde{\gamma}$ 的一个自变量时，仅有的一些非浅显项才会出现。如果(4.90)式甚至对于这些项也为零时(对于任意 $\bar{y}_j$)，那么对于 X_P 中的任意 $\bar{x}$，必定有 $\tilde{\gamma}(\bar{x})=0$。这意味着 $\tilde{\gamma}$ 属于此完全理想。其余的情况($q+m>n$)，使得(4.90)式成为一个恒等式，但是此时当 $\tilde{\gamma}$ 在上述基中展开时，它的每一项中必然至少包含一个 $\tilde{\alpha}_j$，所以 $\tilde{\gamma}$ 属于该理想。

4.31 (a) 设 $\tilde{\beta}$ 属于集合 $\{\tilde{\alpha}_j\}$ 的完全理想。于是因为对于某一集合 $\{\tilde{\gamma}_j\}$，有 $\tilde{\beta}=\Sigma\tilde{\gamma}^j\wedge\tilde{\alpha}_j$，我们就有 $\tilde{d}\tilde{\beta}=\Sigma(\tilde{d}\tilde{\gamma}^j\wedge\tilde{\alpha}_j+\tilde{\gamma}^j\wedge\tilde{d}\tilde{\alpha}_j)$。第一项在理想中；第二项也复如此，因为 $\tilde{d}\tilde{\alpha}_j$ 可以表示为 $\Sigma^k\tilde{\mu}^k\wedge\tilde{\alpha}_k$。

(b) 应用(4.90)式以及一个 $p>n$ 的 p 次形式恒为零的这一事实.

4.32 (b) 满足 $U=$常数, $V=$常数的任意曲线都有一个零化 $\tilde{d}U$ 和 $\tilde{d}V$(因此零化 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$)的切向量,所以在 $\mathscr{X}$ 之中.

(c) 利用(4.90)式来决定 $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{d}\tilde{\beta}$ 在理想中的条件, 这会有大量的代数运算, 而该题中给出的提示是会有帮助的. 例如这会给出 $\tilde{B}\wedge\tilde{d}\tilde{A}=0$. 结果是我们有: $\tilde{d}\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}=\tilde{d}f\wedge\tilde{d}g\wedge[-(\tilde{d}\tilde{C}+\tilde{A}\wedge\tilde{C}+\tilde{B}\wedge\tilde{F})+f(\tilde{d}\tilde{A}+\tilde{B}\wedge\tilde{E})+g(\tilde{d}\tilde{B}+\tilde{A}\wedge\tilde{B}+\tilde{B}\wedge\tilde{D})]$. 这个式子在流形上必须处处为零. 方括号中的项正比于 $\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y$, 而与 $\tilde{d}f\wedge\tilde{d}g$ 无关, 因此它本身必为零. 因为 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ 等与 f 和 g 无关, 这一项为零当且仅当三个括号中的项都分别为零. 这就证明了最初的三个条件. 余下的三个条件可由 $\tilde{d}\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}=0$ 推出.

(d) 从每一项中分解出因子 $\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y$.

4.33 $\tilde{d}\tilde{\gamma}=\omega^2(\tilde{d}x\wedge\tilde{\alpha}+x\tilde{d}\tilde{\alpha})+\tilde{d}y\wedge\tilde{\beta}+y\tilde{d}\tilde{\beta}=-\omega^2y\tilde{d}x\wedge\tilde{d}t-\omega^2x\tilde{d}y\wedge\tilde{d}t+\omega^2x\tilde{d}y\wedge\tilde{d}t+\omega^2y\tilde{d}x\wedge\tilde{d}t=0$. 同样容易证明(4.97)式.

4.34 考虑点积 $(\bar{\nabla}Y_{lm})\cdot({}^*\tilde{d}Y_{lm})=g_{AB}(g^{AC}Y_{lm,C})\times(\omega^{DB}Y_{lm,D})=\omega^{DC}Y_{lm,C}Y_{lm,D}$, 由 ω^{DC} 的斜对称性, 它为零. 因为此时度规是正定的, 这些向量不可能平行, 除非它们为零, 若 $l\neq0$, 那么这只发生在孤立点处.

第五章

5.1 拿掉 $\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T$, 再乘以 P^2.

5.2 (a) $\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega}=0=\tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{U})]$, 这是因为 $\tilde{d}\tilde{\omega}=0$. 由于相空间满足庞加莱引理(4.19 节), 故而存在一个函数 H, 满足 $\tilde{\omega}(\bar{U})=\tilde{d}H$, 这就导致(5.16)式.

(b) 应用 $[\mathscr{L}_{\bar{U}}, \mathscr{L}_{\bar{V}}]=\mathscr{L}_{[\bar{U},\bar{V}]}$, 证明: 若 $\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 都是哈密顿向量场, 则 $[\bar{U}, \bar{V}]$ 也是哈密顿向量场. 这是它们的李代数的括号运算.

5.3 $\tilde{\omega}$ 的斜对称性.

5.4 这是浅显的, 应用分量去证明.

5.5 正如上面的习题 5.2(a) 一样, $\tilde{\omega}(\bar{U})=\tilde{d}H$.

5.6 (b) 只要用一些代数运算即可证得.

(c) 根据(5.32)式, $\{f, \{g, h\}\}=\bar{X}_f\bar{X}_g(h)$; $\{g, \{h, f\}\}=-\{g, \{f, h\}\}=-\bar{X}_g\bar{X}_f(h)$; $\{h, \{f, g\}\}=X_{\{f,g\}}(h)$.

5.7 (b) $\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\sigma}=0$，这是因为 $\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega}=0$。但是 $\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\sigma}=(\mathrm{div}_{\tilde{\sigma}}\bar{U})\tilde{\sigma}$。

5.8 显然有 $\mathscr{L}_{\bar{X}_j}H=0$，而且因为 $\bar{X}_j$ 没有动量分量 $\partial f/\partial x^i=0$，及 $\partial f/\partial P_i=-U^i$。所以 $f=-U^iP_i$。

5.9 应用变换

$$(\Lambda^{i'}_{\ j})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5.10 (a) 四维空间中的一个三次形式具有 $C_3^4=4$ 个独立分量。

(b) 例如 $F_{[xy,z]}=0\Rightarrow F_{xy,z}+F_{zx,y}+F_{yz,x}=0=B_{z,z}+B_{y,y}+B_{x,x}$。这就是(5.52c)式。

5.11 把有关的矩阵相乘。

5.12 例如 $F^{t\nu}{}_{,\nu}=F^{tx}{}_{,x}+F^{ty}{}_{,y}+F^{tz}{}_{,z}=E_{x,x}+E_{y,y}+E_{z,z}$。这给出(5.52d)。

5.13 (a) $(^*\tilde{F})_{tx}=\frac{1}{2}(\omega_{yztx}F^{yz}+\omega_{zytx}F^{zy})=F^{yz}=B_x$。

$$(^*\tilde{F})_{xy}=\frac{1}{2}(\omega_{tzxy}F^{tz}+\omega_{ztxy}F^{zt})=F^{tz}=E_z.$$

整个矩阵可由(5.53)式作下列代换 $B_i\to E_i$，$E_i\to -B_i$ 得到。

(b) 由习题 4.23，这是显然的。

5.14 (a) 可以作如下证明：证明第一个方程给出 $\nabla\cdot\mathbf{B}=4\pi\rho_m$，等等。

(c) $\tilde{d}\tilde{d}^*\tilde{F}=0\Rightarrow 0=\tilde{d}^*\tilde{J}=\tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{J})]=(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{J})\tilde{\omega}$。

5.15 (a) 利用分量来证明是容易的。

(b) 注意：为了积分，我们必须局限在 $\mathscr{S}$ 中，这是因为 $^*\tilde{J}$ 是一个三次形式。

(c) 把 $^*\tilde{J}$ 限制在 $\mathscr{S}$ 中就是 $J^t\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$。把 $\tilde{F}$ 限制在 $\partial\mathscr{D}$(t 和 r 为常数的一个曲面)中就是 $^*F_{\theta\phi}\tilde{d}\theta\wedge\tilde{d}\phi$。现在，$^*F_{\theta\phi}=\frac{1}{2}(\omega_{tr\theta\phi}F^{tr}+\omega_{rt\theta\phi}F^{rt})=r^2\sin\theta E_r$。(回顾一下(4.40)式和习题 4.21。)所以用通常的符号表示，该积分就是$\int\rho\mathrm{d}^3x=\oint E_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$。

5.16 (a) 例如，考虑(5.64)式的(t, x)分量：$F_{tx}=A_{x,t}-A_{t,x}$. 把这一表达式与通常的定义 $E_x=\phi_{,x}+A_{x,t}$ 比较. 因为 $F_{tx}=-E_x$，所以我们能得出 $\phi=A_0$，和 $A^x=-A_x$. 其他等式可从其余的分量得到.

(b) $\phi\rightarrow\phi+f_{,t}$; $A^i\rightarrow A^i-\nabla_i f$.

(c) 对位于原点的静止电荷 q，$\mathbf{B}$ 的所有分量为零，而 $\mathbf{E}=qr^{-2}\mathbf{e}_r$. 只有$(^*\tilde{F})_{\theta\phi}$ 不为零，它等于 $q\sin\theta$(如习题 5.15 中那样). 这给出 $\alpha_{\phi,\theta}-\alpha_{\theta,\phi}=q\sin\theta$. 两个可能的解是 $\{\alpha_\phi=-q\cos\theta,\ \alpha_\theta=\alpha_t=\alpha_r=0\}$ 和 $\{\alpha_\theta=-q\phi\sin\theta,\ \alpha_\phi=\alpha_t=\alpha_r=0\}$. 它们差一个规范变换，而且两者都使得 $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha}$ 的所有其他分量为零. 但是两者都不能定义出一个行为良好的一次形式. 第一个在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的极点处没有定义，而第二个是多值的.

5.17 这是浅显的.

5.18 $(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{W})^i=[\bar{U},\ \bar{W}]^i=U^jW^i_{,j}-W^jU^i_{,j}=U^tW^i_{,t}+U^\alpha W^i_{,\alpha}-W^\alpha U^i_{,\alpha}$，这里对 α 的求和只遍及(x, y, z). 因为 $U^t=1$ 及 $U^i_{,\alpha}=0$，结果得证.

5.19 这些结果由 $\Lambda^{t'}_{x}=\partial t'/\partial x=0$，$\Lambda^{t}_{x'}=\partial t/\partial x'=0$ 证得.

5.20 $\mathrm{d}p=(\partial p/\partial\rho)\mathrm{d}\rho+(\partial p/\partial S)\mathrm{d}S$. 这使得(5.77)式为零，这是因为 $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}S=0=\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\rho$.

5.21 如(5.82)式那样，取(5.80)式的对偶，且算出分量.

5.22 应用 (3.77) 式在笛卡儿坐标下的形式证明 (5.85) 式和(5.86)式，这可适当地简化. 因为它们是张量方程，它们在一个坐标系中成立就能保证它们在所有坐标系中都成立.

5.23 在 $SO(3)$的等距变换群中，显然有这样的元素，它把球面上的任意点移动到任意其他点：这只要把它们用一个大圆连接起来，再绕垂直于该圆的一个轴作转动即可. 因此 S^2 是均匀的. 点 P 的迷向群是使 P 固定的所有转动的集合. 这显然是 $SO(3)$的子群 $SO(2)$，因此 S^2 是各向同性的.

5.24 (a) 因为 V^i 在 P 点必为零(迷向群不变 P 点)，它的泰勒展开是(5.96)式，这里 A^i_j 为某一矩阵. 在我们的坐标(在其中，靠近 P 点时，上标和下标之间是没有区别的)中，$\Gamma^i_{kj}=0$. 此时从(5.89)式能得出 $A^i_j+A^j_i=0$，这就是(5.97)式.

(b) 经过简单的代数运算就可得到(5.98)式.

(c) 这个迷向群具有与 $SO(m)$一样的李代数，因此这些群至少在单位元的某一邻域中是全同的。但是 P 点本身的一个小邻域可以被 1-1 地映到 R^m 的原点的一个邻域上去；且根据上述的(a)，这些开林向量场彼此间可相互映射（精确到 $O(x^2)$）。所以它们的迷向变换可以构成 1-1 对应，所以这些群是全同的。

(d) 如果 g_j^i 不是正定的，那么在我们的坐标中，上升和下降指标会包含着符号的改变。于是 (5.97) 式严格地应是 $A_{ij}=-A_{ji}$，但 $A^i_j\neq A^j_i$，因此该迷向群的李代数不包含斜对称矩阵。

5.25 (a) θ=常数，ϕ=常数的曲线在几何上定义为 $\tilde{n}$ 的一条积分曲线。如果球面之间的径向距离在不同方向上不同的话，该流形就不会是各向同性的了。所以 g_{rr} 与 θ 和 ϕ 无关。

(b) 在 P 点附近，我们可以构造习题 2.14 中的那种坐标，并通过标准的平直空间变换，变换到球极坐标中去。这些新坐标与(5.100)式中的那些坐标是一致的(当 $r\to 0$)，因为球面的面积固定了 r。因此(5.102)式是一定有的。

5.26 通过一些代数运算可证得。

5.27 这些开林向量对应于 ζ_{1m}=常数。容易看到这些向量的范数当 $r\to 0$ 时趋向于零，因此它属于该迷向群的代数。迷向群 $SO(3)$ 是三维的，因此由三个常数 ζ_{1m} 生成的所有向量的集合也是三维的，因此这些向量就是对应于整个迷向群的开林向量。

5.28 转变到笛卡儿坐标中去，或计算 $V_m=1$ 和 $\zeta_{1m}=0$ 的一个向量的范数。

5.29 显然 $f=1\Rightarrow S$ 是 E^3。$\partial/\partial x=\cos\phi\sin\theta\partial/\partial r+r^{-1}\cos\phi\cos\theta\,\partial/\partial\theta-r^{-1}\sin\phi\cos\theta\partial/\partial\phi$ 是由 $V_1=V_{-1}=(2\pi/3)^{1/2}$，$\zeta_{1m}=0$ 生成的向量。

5.30 根据 (5.119) 式中一些矩阵的第二个和第三个对角分量，我们分别有 $r=\sin\chi/\sqrt{K}$ 和 $r=\sinh\chi/\sqrt{|K|}$。我们只需要验证第一个对角分量。例如，在 $K>0$ 的情况下，$g_{\chi\chi}=g_{rr}(\partial r/\partial\chi)^2=(1-Kr^2)^{-1}\cos^2\chi/K=1/K$，这正是所需要的。

5.31 $w=r\cos\chi$，$x=r\sin\chi\sin\theta\sin\phi$，$y=r\sin\chi\sin\theta\cos\phi$，$z=r\sin\chi\cos\theta$。于是，例如有 $g_{\theta\theta}=(\partial w/\partial\theta)^2+(\partial x/\partial\theta)^2+(\partial y/\partial\theta)^2+(\partial z/\partial\theta)^2=r^2\sin^2\chi$。因此命 $r^2=K^{-1}$，就完全一致了。

5.32 (a) 这里的关键是，对于 $K<0$，面积$/4\pi$(径向距离$)^2=\sinh^2\chi/\chi^2>1$. 在 E^n 的一个子流形中考察一个球面. 因为 E^n 的度规是正定的，所以从球面的中心沿着一条曲线(在 E^n 的任意子流形中)到球面的距离总是大于球面的"真正"半径的. 因此对于 E^n 的任意球对称子流形，面积$/4\pi$(径向距离$)^2\leqslant1$. 所以我们不能把开宇宙在保持其度规的前提下"嵌入"任何一个欧几里得空间. 甚至当开宇宙有一个正定的度规时，也是这样.

(b) 在闵可夫斯基空间中考察一个双曲面 $-t^2+x^2+y^2+z^2=K^{-1}(<0)$. 由 $x=r\sin\theta\times\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ 定义通常的球面坐标，于是该子流形是 $t=(r^2-K^{-1})^{1/2}$. 度规张量具有分量 $g_{rr}=-(\partial t/\partial r)^2+(\partial x/\partial r)^2+(\partial y/\partial r)^2+(\partial z/\partial r)^2=(1-Kr^2)^{-1}$. 类似地，$g_{\theta\theta}=r^2$, $g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta$. 因此这一双曲面与开宇宙是等距的.

第 六 章

6.1 直接应用张量的定义.

6.2 应用 $\bar{e}_{\nu'}=\Lambda^{m}_{\nu'}\bar{e}_m$, 从(6.6)式出发进行代数运算.

6.3 这是浅显的.

6.4 在图 6.1 中，基向量 $\bar{e}_\theta$ 在 θ 方向的平行移动下不变: $\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_\theta=0$. 因此从(6.6)式，我们有 $\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}=\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}=0$. 在图 6.2 中，想象在 D 点该向量是 $\bar{e}_\phi$. 于是当它沿 θ 方向平行移动时，它的方向不变，但其大小要改变，这里因为在两极点处 $\bar{e}_\phi\to0$，但是被平移的向量都不然. 事实上，$|\bar{e}_\phi|=\sin\theta$，因此我们有结论: $\bar{e}_\phi(\theta+\delta\theta)-\bar{e}_\phi(\theta)=\bar{e}_\phi(\theta)[\delta(\sin\theta)/\sin\theta]$，或 $\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_\phi=\cot\theta\bar{e}_\phi$，或 $\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}=\cot\theta$, $\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}=0$. 在 $\bar{e}_\phi$ 方向相应的导数是较难计算的，因为 $\theta=$常数的曲线不是大圆. 考虑在 $\phi=0$, $\theta=\theta_0$ 处的一点 P. 在图 A.1

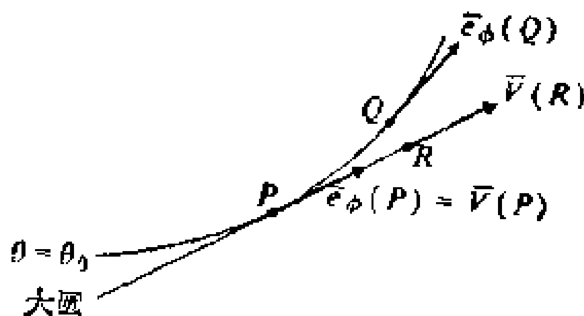


图 A.1

中，我们已画出了 P 的一个邻域，象有人站在那里看到的那样. 过 P 的曲线 $\theta=\theta_0$ 局部地不是一条直线，而是切于 P 点的一个大圆(它看上去是直的). 考察在圆 $\theta=\theta_0$ 上，位于 $\phi=\delta\phi\ll 1$ 处的点 Q. 为了计算(例如说)P 点处的 $\nabla_{\bar{e}_\phi}\bar{e}_\phi$，我们需要精确到 $\delta\phi$ 一阶的差 $\bar{e}_\phi(Q)-\bar{e}_\phi(P)$. 我们的坐标不是笛卡儿坐标，因此我们不能把位于不同点的向量的分量简单地相减. 而是应该如下进行：我们把 $\bar{e}_\phi(P)$ 沿着此大圆平行移动(即使 $\bar{e}_\phi(P)$ 保持与此大圆相切，并保持同样长度)来构造一个向量场 $\bar{V}$. 具有坐标 $\phi=\delta\phi$ 的点 R 非常接近 Q，它们的距离是 $O(\delta\phi^2)$. 所以，精确到一阶，我们可以用 $\bar{V}(R)$ 作为参考，而且近似地有 $\bar{e}_\phi(Q)-\bar{e}_\phi(P)\approx\bar{e}_\phi(Q)-\bar{V}(R)$，对于后者我们能简单地用分量相减的方法来计算. 现在，在我们的坐标中，$\bar{e}_\phi$ 的分量处处都是 $(0, 1)$. 因此我们必须构造 $\bar{V}$. 这个大圆是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x=z\tan\theta_0$ 的交线，在球面坐标中，这个大圆的方程为 $\sin\theta=\sin\theta_0(1-\cos^2\theta_0\sin^2\phi)^{-1/2}$. 把 ϕ 作为它的一个参数，就给出它的切向量 $(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\phi, 1)=(\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\phi/(1-\cos^2\theta_0\sin^2\phi), 1)$. 在 $\phi=0$(P 点)处，这是 $\bar{e}_\phi(P)$；而在 $\phi=\delta\phi$(R 点)处，精确到一阶，它是 $(\sin\theta_0\cos\theta_0\delta\phi, 1)$. 同样精确到一阶时，这与 $\bar{e}_\phi(P)$ 的长度相等，因此这事实上就是 $\bar{V}(R)$. 所以，我们得到 $\nabla_{\bar{e}_\phi}\bar{e}_\phi=\lim_{\delta\phi\to 0}(\bar{e}_\phi(Q)-\bar{V}(R))/\delta\phi=(-\sin\theta_0\cos\theta_0, 0)$. 由此得出 $\Gamma^\theta_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta$，$\Gamma^\phi_{\phi\phi}=0$. 对 $\nabla_\phi\bar{e}_\theta$ 作类似的计算，将给出 $\Gamma^\phi_{\theta\phi}=\cot\theta$，$\Gamma^\theta_{\theta\phi}=0$.

6.5 $\langle\tilde{\omega}^j, \bar{e}_k\rangle=\delta^j_k$，因此 $\langle\nabla_i\tilde{\omega}^j, \bar{e}_k\rangle=-\langle\tilde{\omega}^j, \nabla_i\bar{e}_k\rangle=-\Gamma^j_{ki}$. 所以 $\nabla_i\tilde{\omega}^j$ 是一个一次形式，它的第 k 个分量是 $-\Gamma^j_{ki}$，这正如(6.8)式所表明的.

6.6 应用习题 6.5 以及推出(6.10)式的那些步骤.

6.7 如上题一样.

6.8 在坐标基中有 $[\bar{e}_i, \bar{e}_j]=0$.

6.9 需要证明它对其自变量是线性的. 例如 $\mathbf{T}(\ \ ;f\bar{U}, \bar{V})=\nabla_{f\bar{U}}\bar{V}-\nabla_{\bar{V}}(f\bar{U})-[f\bar{U}, \bar{V}]=f(\nabla_{\bar{U}}\bar{V}-\nabla_{\bar{V}}\bar{U}-[\bar{U}, \bar{V}])-\bar{U}\nabla_{\bar{V}}(f)+\bar{U}\mathscr{L}_{\bar{V}}(f)$. 包含 f 导数的两项对消了，因此 $\mathbf{T}$ 对此自变量确实是线性的.

6.10 用类似于习题 6.9 的证明.

6.11 我们只需要在标量(此时";"和","的作用是一样的)和向量(这是(6.13)式的内容)的情况下去证明这一点，因为这两个求导法则都是通

过(6.3)式推广到较高阶张量上去的，因此这一结果对所有张量都成立。

6.12 显然.

6.13 进行一些代数运算便能证明.

6.14 (a) 在坐标基中，$[\bar{e}_i, \bar{e}_j]=0$. $\nabla_i\nabla_j\bar{e}_k=\nabla_i\Gamma^l_{kj}\bar{e}_l=\Gamma^l_{kj,i}\bar{e}_l+\Gamma^l_{kj}\nabla_i\bar{e}_l=\Gamma^l_{kj,i}\bar{e}_l+\Gamma^l_{kj}\Gamma^m_{li}\bar{e}_m$. 对 i 和 j 斜对称化，且将某些指标重新编号即能给出所求结果.

(b) 显然.

(c) 由(6.19)式，(6.23a)式是显然的. 但(6.23b)式必须加以证明. 在 P 点的正规坐标下，$\Gamma^i_{jk}(P)=0$, 因此 $R^l_{kij}(P)=\Gamma^l_{kj,i}-\Gamma^l_{ki,j}$. 于是因为 $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$, 所以 $3R^l_{[kij]}=\Gamma^l_{kj,i}-\Gamma^l_{ki,j}+\Gamma^l_{ik,j}-\Gamma^l_{jk,i}+\Gamma^l_{ji,k}-\Gamma^l_{ij,k}=0$.

(d) 这 4 个指标意味着我们开始时有 n^4 个分量. (6.23a)式是 $n^2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立的关系，这是因为 l 和 k 是任意的，且有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个对称对(ij). (这与一个对称的 $n\times n$ 矩阵所具有的独立矩阵元的个数一样.) 约束方程(6.23b)完全与(6.23a)式无关，因为它只涉及到 $R^l_{[kij]}$. 在这个方程中，有 $n(n-1)(n-2)/3!$ 个不同的斜对称三重组(kij)，而 l 可任意选取，这就有(6.24)式中的第三项.

6.15 在 P 点的正规坐标下，$R^l_{kij;m}=R^l_{kij,m}=\Gamma^l_{kj,im}-\Gamma^l_{ki,jm}$. 其中第一项对于$(im)$是对称的，第二项对于$(jm)$是对称的，因此两者在(6.25)式中都为零. 由(6.19)式可得所求的雅可比结构。

6.16 (a)$\bar{e}_r=\cos\theta\bar{e}_x+\sin\theta\,\bar{e}_y$, $\bar{e}_\theta=-r\sin\theta\,\bar{e}_x+r\cos\theta\bar{e}_y\Rightarrow\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_r=-\sin\theta\,\bar{e}_x+\cos\theta\,\bar{e}_y=r^{-1}\bar{e}_\theta\Rightarrow\Gamma^\theta_{r\theta}=r^{-1}$, $\Gamma^r_{r\theta}=0$. 其他的可以同样推出.

(b) $V^r{}_{;r}=V^r{}_{,r}$. $V^r{}_{;\theta}=V^r{}_{,\theta}-rV^\theta$ $V^\theta{}_{;r}=V^\theta{}_{,r}+V^\theta/r$. $V^\theta{}_{;\theta}=V^\theta{}_{,\theta}+V^r/r$. $V^i{}_{;i}=V^r{}_{,r}+r^{-1}V^r+V^\theta{}_{,\theta}=r^{-1}(rV^r)_{,r}+V^\theta{}_{,\theta}$.

6.17 (a) $(\mathscr{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_{i\cdots k}=\tilde{\omega}_{i\cdots k,l}V^l+\omega_{i\cdots k}V^l{}_{,l}=\omega_{i\cdots k;l}V^l+\omega_{i\cdots k}V^l{}_{;l}$. 于是，当且仅当 $\nabla\tilde{\omega}=0$, 那么对于所有的 $\bar{V}$, 有 $V^l{}_{;l}=\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V}$.

(b) $\omega_{i\cdots k;l}=\omega_{i\cdots k,l}-\Gamma^m_{ml}\omega_{i\cdots k}=(f_{,l}-f\Gamma^m_{ml})\varepsilon_{i\cdots k}$.

6.18 (a) $\nabla_{\bar{V}}[\mathrm{g}(\bar{A},\bar{B})]=(\nabla_{\bar{V}}\mathrm{g})(\bar{A},\bar{B})+\mathrm{g}(\nabla_{\bar{V}}\bar{A},\bar{B})+\mathrm{g}(\bar{A},\nabla_{\bar{V}}\bar{B})=(\nabla_{\bar{V}}\mathrm{g})(\bar{A},\bar{B})$. 当且仅当 $\nabla\mathrm{g}=0$, 上式才对所有的 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{V}$ 都为零.

(b) (6.29)式意味着 $g_{ij,k}=\Gamma^l_{ik}g_{lj}+\Gamma^l_{jk}g_{il}$. 把各个 g 按(6.30)式右

边的那样加起来，即能得到所求结果.

6.19 我们需要证明(6.30)式意味着 $\Gamma^{i}_{ik}=(\ln|g|^{1/2})_{,k}$. 一旦我们证明了 $g_{,k}=g^{ji}g_{ij,k}$(这对于任意矩阵的行列式都是成立的)，这就容易了. 我们从 $g=\varepsilon^{i\cdots k}g_{1i}\cdots g_{nk}=g_{1i}(\varepsilon^{ij\cdots k}g_{2j}\cdots g_{nk})$开始. 由此我们看到：若我们定义 $g^{i1}=g^{-1}\varepsilon^{ij\cdots k}g_{2j}\cdots g_{nk}$，则我们有 $1=g_{1i}g^{i1}$. 而且，由 ε 的斜对称性，有 $g_{2i}\cdot g^{i1}=0$. 所以，对于 g_{ij} 的逆矩阵，我们有下列明晰的表达式：$g^{ij}=((n-1)!\,g)^{-1}\varepsilon^{il\cdots m}\varepsilon^{jk\cdots r}g_{lk}\cdots g_{mr}$. 现在，我们应用习题 4.12(b)，即 $g=\varepsilon^{il\cdots m}\varepsilon^{jk\cdots r}g_{ij}g_{lk}\cdots g_{mr}/n!$，推出 $g_{,a}=n\varepsilon^{il\cdots m}\varepsilon^{jk\cdots r}g_{ij,a}g_{lk}\cdots g_{mr}/n!=g_{ij,a}g^{ji}$. 余下的证明是容易的.

6.20 在(3.37)式中，用符号“;”来代替符号“,”，再应用 $\nabla_i g_{jk}=0$.

6.21 进行一些代数运算便能证明.

6.22 (b) 我们不能简单地在(6.24)式中减去一个表示(6.33)式中约束条件的新的数，因为这些新的约束条件与以前的一些条件可能不是全部独立的. 我们用下列方法：我们重新开始，并集中到指标对上去. 根据(6.23a)式，有 $\frac{1}{2}n(n-1)$个独立对，因此(6.33)式意味着 R 是一个 $\frac{1}{2}n(n-1)$维空间中的对称矩阵，即它有 $\frac{1}{2}[n(n-1)/2]\times[n(n-1)/2+1]=n(n-1)(n^2-n+2)/8$ 个独立分量. 现在，(6.23b)式表示的独立约束比以前少. 如果给定了所有的三重组(kij)(总共有 $n(n-1)(n-2)/3!$ 个可能组)，那么是否每一个 l 的取值都能给出一个独立的约束条件? 不会，因为(6.23a)式和(6.33)式使我们能推得 $3R_{l[kij]}=R_{lkij}+R_{lijk}+R_{ljki}=R_{ijlk}+R_{kilj}+R_{kjli}=3R_{k[lji]}$. 这意味着仅对每一个由 4 个(全不相同的)指标确定的一个集合，我们才有新的信息：一共有 $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$ 个约束条件，而最后的结果正如习题中所给出的.

6.23 (a) 从(6.33)式和(6.23a)式推得.

6.24 测地线由(6.16a)式定义. 由此容易看出 $\nabla_{\bar{U}}\,g(\bar{U},\bar{U})=0$，因此若 $g(\bar{U},\bar{U})\neq 0$，则路径中的小变差不会改变 $g(d\bar{x}/d\lambda,d\bar{x}/d\lambda)$的符号. 我们先来证明类空测地线的情况. 根据变分运算，当路径变差为 $\delta x^i(\lambda)$时，$\delta\int(g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j)^{1/2}d\lambda$ 精确到一阶是 $-\frac{1}{2}\int\delta x^i(\lambda)(-2d(g_{ij}\dot{X}^j)/d\lambda+g_{jk,i}\dot{X}^j\dot{X}^k)(g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j)^{-1/2}d\lambda=\int\delta x_i(\lambda)(\ddot{X}^i+\Gamma^i{}_{jk}\dot{X}^j\dot{X}^k)(g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j)^{-1/2}d\lambda$.

(其中符号“·”表示 $d/d\lambda$.)这意味着测地线对应极值. 对类时测地线的证明几乎是完全一样的. 零测地线的情况可作如下处理: 把该积分分段进行,在每一段中,变分是类时的,或类空的,或零的。

6.25 (a) $D_\mu\psi=\nabla_\mu\psi-iA_\mu\psi$. $D_\mu(e^{i\phi(x)}\psi)=\nabla_\mu(e^{i\phi}\psi)-i(A_\mu+\nabla_\mu\phi)\psi$ $=e^{i\phi}(\nabla_\mu\psi-iA_\mu\psi)=e^{i\phi}D_\mu\psi$.

(b) $D_\mu D_\nu\psi=\nabla_\mu\nabla_\nu\psi-iA_\nu\nabla_\mu\psi-i(\nabla_\mu A_\nu)\psi-iA_\mu\nabla_\nu\psi-A_\mu A_\nu\psi$. 由于 $\nabla_\mu\nabla_\nu\psi=\nabla_\nu\nabla_\mu\psi$, 我们有 $[D_\mu, D_\nu]\psi=-i(\tilde{d}\tilde{A})\psi$。

2. 人名译名对照表

Abel	阿贝尔
Betti	贝蒂
Bianchi	比安基
Caratheodory	凯雷瑟多里
Cartan E.	嘉当
Christoffel	克里斯托弗尔
Copernicus	哥白尼
De Rham	德雷姆
Descartes	笛卡儿
Dirac	狄拉克
Einstein	爱因斯坦
Ertel	厄特尔
Euclid	欧几里得
Euler	欧拉
Farady	法拉第
Fourier	傅里叶
Frobenius	弗罗比纳斯
Galilei	伽利略
Gauss	高斯
Gordon	高登
Grassmann	格拉斯曼
Hamilton	哈密顿
Hausdorff	豪斯道夫
Helmholtz	亥姆霍兹
Hermite	厄密
Hilbert	希尔伯特
Jacobi	雅可比
Kepler	开普勒
Killing	开林
Klein	克莱因
Kronecker	克罗尼克尔
Lagrange	拉格朗日
Leibniz	莱布尼兹
Levi-Civita	列维-齐维他
Lie	李
Liouville	刘维尔
Lorentz	洛伦兹
Maxwell	麦克斯韦
Minkowski	闵可夫斯基
Möbius	默比乌斯
Newton	牛顿
Poincaré	庞加莱
Poisson	泊松
Ptolemy	托勒密
Ricci	里奇
Riemann	黎曼
Sorkin	索金
Stokes	斯托克斯
Taylor	泰勒
Weyl	韦尔
Wheeler	惠勒

3. 中英名词对照和索引